Irregolarità e conduttore di Swan p-adici

Adriano Marmora

LAGA, Institut Galilée, Université Paris13, France

Giornate di Geometria Algebrica ed Argomenti Correlati VII

Rimini, 18–22 Maggio 2004

Notazioni:

- K campo di valutazione discreta, completo, $\operatorname{car} K = 0$;
- $\mathcal{O}_K$ l'anello degli interi;
- k campo residuo, $\operatorname{car} k = p > 0$, perfetto;
- $\overline{K}$ una chiusura algebrica fissata;
- $\mathrm{G}_K = \mathcal{G}al(\overline{K}/K)$ gruppo di Galois assoluto;
- $I_K \trianglelefteq \mathrm{G}_K$ inerzia assoluta;
- $P_K \trianglelefteq I_K$ inerzia selvaggia (pro-p-Sylow);

$$
\begin{tikzcd}[arrows=-]
 & \overline{K} \arrow[ddl] \arrow[ddd] \arrow[drr] & & \\
 & & & K_\infty \arrow[dl] \\
K_{\mathrm{a}}^{\mathrm{nr}} \arrow[ddr] & & K_n \arrow[dl] & \\
 & K \arrow[d] \arrow[uurr, bend right, "\Gamma_K \hookrightarrow \mathbb{Z}_p^*\text{, aperto}"'] & & \\
 & K_{\mathrm{a}} = \mathrm{Fr}\,\mathbb{W}(k) & &
\end{tikzcd}
$$

- $K_n = K(\mu_{p^n})$, μ_{p^n} = radici p^n-esime di 1;
- $\mathrm{Rap}_{\mathbb{Q}_p}(\mathrm{G}_K)$ la categoria delle rappresentazioni galoisiane p-adiche: $\mathbb{Q}_p$-spazi vett. di dim. finita + azione cont. di G_K.

Per studiare queste rappresentazioni Fontaine definisce una gerarchia:

$$\begin{array}{c}\text{rap. di de Rham (dR)}\\ \cup \\ \text{rap. semi-stabili (st)}\\ \cup \\ \text{rap. cristalline (cris)}\end{array}$$

Teorema della monodromia p-adica.
(Berger-André-Mebkhout-Kedlaya)

$$\mathrm{dR} \iff \mathrm{pst}$$

pst $:= \exists\, L/K$ finita t.c. $V_{|\mathrm{G}_L}$ è semi-stabile.

V pst $\overset{\text{Fontaine}}{\Longrightarrow}$ invarianti numerici *interi*, che ”misurano” la carenza di semi-stabilità, $\mathrm{ar}(V)$ e $\mathrm{sw}(V)$.

<u>Obiettivo</u>: **lo studio di** $\mathrm{ar}(V)$ **e** $\mathrm{sw}(V)$**.**

Problema. P_K *non agisce* in generale *tramite un quoziente finito* *(*$\mathrm{car\,residua}\, K = p = \mathrm{car\,residua}\, \mathbb{Q}_p$*)*

La rappresentazione di Weil-Deligne $\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V)$

Anelli di Fontaine:

$$\mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \subset \mathrm{B}_{\mathrm{st}} \subset \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$$

$\mathbb{Q}_p$-algebre topologiche munite di un'azione continua di G_K.

Definizioni.

$$\mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V) := (\mathrm{B}_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{\mathrm{G}_K}.$$

È un $\mathrm{B}_{\mathrm{st}}^{\mathrm{G}_K} = K_{\mathrm{a}}$-spazio vettoriale di dimensione $\leq \dim_{\mathbb{Q}_p} V$.

- V st $\overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \dim_{K_{\mathrm{a}}} \mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V) = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$;
- V cris $\overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \dim_{K_{\mathrm{a}}} \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V) = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$;
- V dR $\overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \dim_{K} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V) = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$.

$$\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \varinjlim_{L/K \text{ finita}} (\mathrm{B}_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{\mathrm{G}_L}$$

1. $K_{\mathrm{a}}^{\mathrm{nr}}$-spazio vettoriale, $\dim_{K_{\mathrm{a}}^{\mathrm{nr}}} \mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V) \leq \dim_{\mathbb{Q}_p} V$;
2. V pst $\Longleftrightarrow \dim_{K_{\mathrm{a}}^{\mathrm{nr}}} \mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V) = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$;
3. $\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V)$ è munito di un'azione semi-lineare di G_K, la cui restrizione a I_K è lineare e si fattorizza su un quoziente finito.

Definizione (Fontaine). *Per* $V \in \mathrm{Rap}_{\mathbb{Q}_p}(\mathrm{G}_K)_{\mathrm{pst}}$,

$$\mathrm{ar}(V) := \mathrm{ar}(\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V)_{|I_K})$$
$$\mathrm{sw}(V) := \mathrm{sw}(\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V)_{|I_K})$$

Osservazione. *Se l'azione di* G_K *si fattorizza su un quoziente finito allora* $\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V) = K_{\mathrm{a}}^{\mathrm{nr}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ *e* $\mathrm{ar}(V), \mathrm{sw}(V)$ *coincidono con la definizione classica (* J.-P. Serre, *Corps Locaux).*

Misura della semi-stabilità

Proposizione (Fontaine). *Sia* $V \in \mathrm{Rap}_{\mathbb{Q}_p}(\mathrm{G}_K)_{\mathrm{pst}}$. *Allora:*

1. $\mathrm{ar}(V) = 0 \Longleftrightarrow V$ *è semi-stabile;*
2. $\mathrm{sw}(V) = 0 \Longleftrightarrow \exists\, L/K$ *finita, moderatamente ramificata t.c.* $V_{|\mathrm{G}_L}$ *è semi-stabile.*

Equazioni differenziali p-adiche (Robba, Christol, Mebkhout,. . .)

L'anello di Robba delle funzioni analitiche al bordo

$$\mathcal{R} = \left\{ s(T) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n T^n \,\middle|\, a_n \in K_{\mathrm{a}}, \exists \varepsilon > 0, s(T) \text{ converge nella corona } [1-\varepsilon, 1[\right\}$$

La derivazione canonica nei differenziali continui: $\mathcal{R} \xrightarrow{d} \widehat{\Omega}^1_{\mathcal{R}/K_{\mathrm{a}}}$.

Def. *Un'equazione differenziale p-adica è un modulo a connessione di presentazione finita sull'anello di Robba*

$$M \xrightarrow{\nabla} M \otimes_{\mathcal{R}} \widehat{\Omega}^1_{\mathcal{R}/K_{\mathrm{a}}}$$

Fatto: M eq. diff. p-adica $\Longrightarrow M$ è libero.

Def. *Frobenius* $\sigma : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$

- *endomorphismo continuo;*

- $\exists h \geq 1$ *t.c.* $\sigma_{|K_{\mathrm{a}}} = F^h$, *ove* $F \stackrel{\mathrm{def}}{=}$ *frob. assoluto di* K_{a}*;*

- $\sigma(T) - T^{p^h} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n T^n$, $a_n \in p\mathbb{W}(k)$.

Def. *Eq. differenziale munita di una struttura di Frobenius (*$\mathrm{MCF}(\mathcal{R})$*)*

$$\exists\, \varphi : M \longrightarrow M \qquad \sigma\text{-semilineare, orizzontale, t.c.}$$

$\varphi(M)$ *generi* M *su* $\mathcal{R}$.

$$
\begin{aligned}
&M \text{ banale} &&\overset{\text{def}}{\iff} && \dim_{K_{\mathrm{a}}} M^{\nabla} = \mathrm{rg}(M);\\[2ex]
&M \text{ unipotente} &&\overset{\text{def}}{\iff} && \text{estensione iterata di eq. diff. del tipo } (\mathcal{R}, d)\\
& &&\iff && \dim_{K_{\mathrm{a}}} \left(M \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{R}[\log T]\right)^{\nabla} = \mathrm{rg}(M),\\
& && && \text{ove } d \log T = \tfrac{dT}{T};\\[2ex]
&M \text{ quasi-unipotente} &&\overset{\text{def}}{\iff} && \exists \mathcal{R}'/\mathcal{R} \text{ finita etale di un tipo particolare t.c.}\\
& && && M \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{R}' \text{ è unipotente.}
\end{aligned}
$$

Irregolarità di un'equazione differenziale p-adica

$\mathcal{A} := \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n T^n \in \mathcal{R} \right\}$ anello delle funzioni analitiche sul disco.
$\gamma_+ : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{R}$ inclusione canonica, $\gamma^+ : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{A}$ troncamento.

Sia $M \in \mathrm{MC}(\mathcal{R})$. Ad ogni ξ derivazione cont. di $\mathcal{R}$, corrisponde

$$\nabla_\xi \colon M \xrightarrow{\nabla} M \otimes_{\mathcal{R}} \widehat{\Omega}^1_{\mathcal{R}/K_{\mathrm{a}}} \xrightarrow{\mathrm{Id} \otimes \xi^*} M.$$

Fissato $M \cong \mathcal{R}^n$ e $\xi = T\frac{d}{dT}$, ∇_ξ è determinata da $G \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathcal{R})$.

Def. *M ammette un indice generalizzato in $\mathcal{A}$ se l'operatore*

$$\tilde{u} \colon \mathcal{A}^n \xrightarrow{\gamma_+} \mathcal{R}^n \xrightarrow{T\frac{d}{dT} - G} \mathcal{R}^n \xrightarrow{\gamma^+} \mathcal{A}^n$$

ammette un indice, ovvero:

$$\dim_{K_{\mathrm{a}}} \mathrm{Ker}\, \tilde{u} < +\infty \ \ e \ \ \dim_{K_{\mathrm{a}}} \mathrm{Coker}\, \tilde{u} < +\infty$$

In tal caso,

$$\widetilde{\chi}(M, \mathcal{A}) := \dim_{K_{\mathrm{a}}} \operatorname{Ker} \tilde{u} - \dim_{K_{\mathrm{a}}} \operatorname{Coker} \tilde{u} \in \mathbb{Z}$$

- $\widetilde{\chi}(M, \mathcal{A})$ non dipende dalla base scelta;
- $\widetilde{\chi}(\cdot, \mathcal{A})$ è additivo sulle sequenze esatte.

Teorema (Christol-Mebkhout). *Sia $M \in \mathrm{MCF}(\mathcal{R})$. Allora M ammette un indice generalizzato in $\mathcal{A}$.*

Def. $M \in \mathrm{MCF}(\mathcal{R}), \operatorname{irr}(M) := \widetilde{\chi}(M, \mathcal{A})$

Esiste un'altra def.: pendenze p-adiche (C.-M.) $\Longrightarrow \operatorname{irr}(M) \in \mathbb{N}$.

Teorema (Berger). *Esiste un frobenius σ di $\mathcal{R}$ e un funtore*

$$\mathrm{N}_{\mathrm{dR}} \colon \mathrm{Rap}_{\mathbb{Q}_p}(\mathrm{G}_K)_{\mathrm{dR}} \longrightarrow \mathrm{MCF}(\mathcal{R})$$

t.c. :

- $\otimes$*-funtore additivo, esatto e fedele (ma non pieno!);*
- $\forall\, V \in \mathrm{Rap}_{\mathbb{Q}_p}(\mathrm{G}_K)_{\mathrm{dR}}$, $\mathrm{rg}\, \mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V) = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$ *;*
- $\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)$ *è quasi unipotente* $\Longleftrightarrow$ V *è potenz. semi-stabile;*
- $\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)$ *è unipotente* $\Longleftrightarrow \exists\, n$ *t.c.* V *è semi-stabile su* K_n*;*
- $\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)$ *è banale* $\Longleftrightarrow \exists\, n$ *t.c.* V *è cristallina su* K_n*.*

Teorema. *Sia V una rappresentazione di de Rham. Allora*

$$\mathrm{irr}(\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{sw}(V_{|\mathrm{G}_{K_n}}).$$

<u>Variante</u>:

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{ar}(V_{|\mathrm{G}_{K_n}}) =$$

$$= \underbrace{\mathrm{irr}(\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V))}_{\geq 0} + \underbrace{\mathrm{rg}(\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)) - \dim_{K_{\mathrm{a}}} (\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V) \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{R}[\log T])^{\nabla}}_{\text{misura grossolana d'unipotenza } \geq 0}.$$

L'analogo in caratteristica $p > 0$ (caso isocaratteristico): teorema di Tsuzuki.

Ponte dalla caratteristica 0 alla caratteristica p :

Teoria del campo di norme (Fontaine-Wintinberger)

Definizione.

$\mathrm{E}_K := \varprojlim_{norme} K_n$, *insieme, con le operazioni*

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} + (y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad z_n = \lim_{n\leq m\to+\infty} N_{K_m/K_n}(x_m + y_m),$

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}.$

Proprietà di E_K:

- E_K è un campo (campo di norme);
- di valutazione discreta, completo;
- di caratteristica $p > 0$;
- campo residuo di E_K = campo residuo di $K_\infty = k$ senza perdita di generalità ;
- $\mathrm{G}_{\mathrm{E}_K} = \mathcal{G}al(\mathrm{E}_K^{\mathrm{sep}}/\mathrm{E}_K) \cong \mathcal{G}al(\overline{K}/K_\infty)$.

Scegliamo $\pi \in \mathrm{E}_K$ uniformizzante, allora $\mathrm{E}_K \cong k(\!(T)\!)$.

Strategia classica

Sia $V \in \mathrm{Rap}_{\mathbb{Q}_p}(\mathrm{G}_K)$, si considera

$$V_{|\mathcal{G}al(\overline{K}/K_\infty)}$$

come rappresentazione p-adica di $\mathcal{G}al(k((T))^{\mathrm{sep}}/k((T)))$ (caso isocaratteristico).

<u>Vantaggio</u>: equivalenza (locale) di Katz.

$$\mathcal{E} = \left\{ \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n T^n \middle| \; (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \text{ limitata in } K_{\mathrm{a}}, \lim_{n\to-\infty} a_n = 0 \right\}$$

Campo di valutazione discreta, completo, $\operatorname{car}\mathcal{E} = 0$, assolutamente non ramificato, campo residuo $k(\!(T)\!)$.

$$\mathcal{E}^\dagger = \{\, s(T) \in \mathcal{E} |\; \exists\varepsilon, s(T) \text{ converge nella corona } [1-\varepsilon, 1[\}$$

Campo di v.d., non è completo, $\mathcal{O}_{\mathcal{E}^\dagger}$ è henseliano, campo residuo $k(\!(T)\!)$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E} \arrow[loop above, "\sigma"] & & \mathcal{R} \arrow[loop above, "\sigma"] \\
& \mathcal{E}^\dagger \arrow[ul, dash] \arrow[ur, dash] \arrow[loop below, "\sigma"] &
\end{tikzcd}$$

Def. (φ, ∇)-*modulo su* $\mathcal{E}$*:*

i) $\mathcal{E}$*-spazio vettoriale di dimensione finita* M*;*

ii) frobenius $\varphi\colon M \to M$ σ*-semilineare, t.c.* $\varphi(M)$ *generi* M*;*

iii) una connessione $\nabla\colon M \to M \otimes_{\mathcal{E}} \widehat{\Omega}^1_{\mathcal{E}/K_{\mathrm{a}}}$*, t.c.* φ *sia orizzontale.*

Def. M *è etale se è di pendenza* 0 *come* φ*-modulo.*

Def. (φ, ∇)-*modulo surconvergente* $=$ (φ, ∇)-*modulo su* $\mathcal{E}^\dagger$*.*

Morfismi $=$ applicazioni lineari orizzontali commutanti con i frobenius.

Equivalenza locale di Katz

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{D}\colon \mathrm{Rap}_{\mathbb{Q}_p}(\mathrm{G}_{k((T))}) & \xrightarrow{\simeq} & (\varphi,\nabla)\text{-modulo etali su } \mathcal{E} \\ W & \longmapsto & \mathrm{D}(W) := (\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{nr}}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} W)^{\mathrm{G}_{k((T))}} \end{array}$$

Se $I_{k((T))}$ agisce tramite un quoziente finito (monodromia finita) allora $\mathrm{D}(W)$ è surconvergente.

Precisamente,

Teorema 1 (Tsuzuki).

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{D}^\dagger\colon \mathrm{Rap}_{\mathbb{Q}_p}(\mathrm{G}_{k((T))})^{\mathrm{fin}} & \xrightarrow{\simeq} & (\varphi,\nabla)\text{-}\textit{moduli etali su } \mathcal{E}^\dagger \\ W & \longmapsto & \mathrm{D}^\dagger(W) \end{array}$$

e

$$\mathrm{D}(W) = \mathrm{D}^\dagger(W) \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathcal{E}.$$

Teorema 2 (Tsuzuki). *Sia* $W \in \mathrm{Rap}_{\mathbb{Q}_p}(\mathrm{G}_{k((T))})^{\mathrm{fin}}$, *allora*

$$\mathrm{sw}(W_{|I_{k((T))}}) = \mathrm{irr}(\mathrm{D}^\dagger(W) \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathcal{R}).$$

Caso eterocaratteristico

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Rap}_{\mathbb{Q}_p}(\mathrm{G}_K) & \longrightarrow & \mathrm{Rap}_{\mathbb{Q}_p}(\mathrm{G}_{k((T))}) \\ V & \longmapsto & V_{|\mathcal{G}al(\overline{K}/K_\infty)}\end{array}$$

Problema 1. $V_{|\mathcal{G}al(\overline{K}/K_\infty)}$ *non ha monodromia finita in generale.*

Problema 2. *Anche se* G_K *agisse tramite un quoziente finito,*

$$\mathrm{sw}(V) \neq \mathrm{sw}(I_{k((T))}, V_{|\mathcal{G}al(\overline{K}/K_\infty)})$$

in generale.

Traccia della dimostrazione

Def. *Parte non ciclotomica della rappresentazione di Weil-Deligne: sia* V pst,

$$\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}^{\infty}(V) := \mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V)_{|\mathcal{G}al(\overline{K}/K_\infty)}$$

come $K_{\mathrm{a}}^{\mathrm{nr}}$*-rappresentazione semi-lineare di* $\mathcal{G}al(k(\!(T)\!)^{\mathrm{sep}}/k(\!(T)\!))$.

$I_{k(\!(T)\!)}$ agisce linearmente tramite un quoziente finito.

Quanto vale $\mathrm{sw}\left(\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}^{\infty}(V)_{|I_{k(\!(T)\!)}}\right)$?

Lemma 1. *Sia V pst, allora*

$$\mathrm{sw}\left(\mathrm{D}^{\infty}_{\mathrm{pst}}(V)_{|I_{k((T))}}\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{sw}\left(V_{|\mathrm{G}_{K_n}}\right).$$

Conseguenza diretta di un lemma classico di Sen sulle filtrazioni di ramificazione in una torre ciclotomica.

Lemma 2. *Sia* V pst, *allora*

$$\mathrm{irr}(\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)) = \mathrm{sw}\left(\mathrm{D}^{\infty}_{\mathrm{pst}}(V)_{|I_{k((T))}}\right). \tag{$\star$}$$

- Bisogna paragonare $\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)$ e $\mathrm{D}^{\infty}_{\mathrm{pst}}(V)$.
- Corrispondenza di Riemann-Hilbert (cf. dimostrazione di André della congettura di Crew).

$$
\begin{array}{ll}
F/k((T)) & \text{estensione galoisiana finita } G = \mathcal{G}al(F/k((T))) \\
\quad\Downarrow & \\
\left.\begin{array}{l} \mathcal{E}(F)/\mathcal{E} \\ \mathcal{E}^\dagger(F)/\mathcal{E}^\dagger \end{array}\right\} & \begin{array}{l} \text{estensione galoisiana, finita, non-ramificata,} \\ \text{di campo residuo } F; \end{array} \\
\mathcal{R}(F) := \mathcal{R} \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathcal{E}^\dagger(F)/\mathcal{R} & \text{rivestimento galoisiano finito.}
\end{array}
$$

Osservazione. *$\mathcal{R}(F)/\mathcal{R}$ sono le estensioni etali finite di un "tipo particolare" della definizione di eq. diff. quasi-unipotenti.*

Corrispondenza di Riemann-Hilbert

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c}\mathrm{MCF}(\mathcal{R}) \\ \text{unipotenti su } \mathcal{R}(F).\end{array} & \xrightarrow{\simeq} & \begin{array}{l} \qquad \mathrm{Vett}(\mathrm{Fr}\,\mathbb{W}(k_F))^{\mathrm{fin}} \\ + \text{ azione semilineare } G = \mathcal{G}al(F/k((T))), \\ + \text{ endomorfismo nilpotente}, \\ + \text{ struttura di Frobenius}, \\ + \text{ dati di compatibilità}. \end{array} \\ & & \\ M & \longmapsto & \begin{array}{c} \mathrm{Sol}_F(M) := (M \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{R}(F)[\log T])^{\nabla} \\ N_{\mathrm{Sol}_F(M)} \text{ indotto da } N\colon \ \log T \mapsto 1 \end{array} \\ & & \\ \begin{array}{c} (S \otimes_{\mathrm{Fr}\,\mathbb{W}(k_F)} \mathcal{R}(F)[\log T])^{G, N'=0} \\ N' := N_S \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes N \end{array} & \longleftarrow\!\!\shortmid & S \end{array}$$

Proposizione. *Siano* V pst *e* L/K *gal. finita t.c.* $V_{|\mathrm{G}_L}$ *sia semi-stabile. Allora*

$$\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}^{\infty}(V) \cong K_{\mathrm{a}}^{\mathrm{nr}} \otimes_{\mathrm{Fr}\,\mathbb{W}(k_L)} \mathrm{Sol}_{\mathrm{E}_L}(\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V))$$

Per dimostrare il lemma 2: variante del teorema 2 di Tsuzuki (cf. André).

Proposizione. *Sia* $M \in \mathrm{MCF}(\mathcal{R})$ *unipotente su* $\mathcal{R}(F)$, $F/k(\!(T)\!)$ *gal. finita. Allora*

$$\mathrm{irr}(M) = \mathrm{sw}\left(\mathrm{Sol}_F(M)_{|I_{F/k(\!(T)\!)}}\right).$$

Dimostrazione: teorema di induzione di Brauer.

Corollario. *Siano* V pst *e* L/K *gal. finita t.c.* $V_{|\mathrm{G}_L}$ *sia semi-stabile. Allora, tramite l'isomorfismo*

$$\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}^{\infty}(V) \cong K_{\mathrm{a}}^{\mathrm{nr}} \otimes_{\mathrm{Fr}\,\mathbb{W}(k_L)} \mathrm{Sol}_{\mathrm{E}_L}(\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V))$$

decomposizione Break-Swan di $\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}^{\infty}(V)$ *(*Katz*)*	$\longleftrightarrow$	*decomposizione pendenze* p*-adiche di* $\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)$ *(*Christol-Mebkout*)*

Riferimenti bibliografici

[1] Y. André, *Filtrations de type Hasse-Arf et monodromie p-adique*. Invent. math. **148** (2002), 285–317.

[2] L. Berger, *Représentations p-adiques et équations différentielles*. Invent. math. **148** (2002), 219–284.

[3] G. Christol, Z. Mebkhout, *Sur le théorème de l'indice des équations diff. p-adiques IV*. Invent. math. **143** (2001), 629–672.

[4] J.-M. Fontaine, *Représentations p-adiques semi-stables*. Astérisque **223**, Soc. Math. de France, Paris (1994), 113–184.

[5] A. Marmora, *Irrégularité et conducteur de Swan p-adiques*. Prépub. math. Univ. Paris13 **27**, Villetaneuse (2003).

[6] N. Tsuzuki, *The local index and Swan conductor*. Compositio Mathematica **111** (1998), 245–288.

[7] S. Sen, *On automorphisms of local fields.* Annals of mathematics **90** (1969), 33–46.

[8] J.-P. Wintenberger, *Le corps des normes de certaines extensions infinies de corps locaux; applications.* Ann. scient. Éc. Norm. Sup., IV série, tome **16** (1983), 59–89.