FIBRATI DI STEINER E NUMERI DI FIBONACCI

MARIA CHIARA BRAMBILLA

Un fibrato di Steiner su $\mathbb{P}^n$ è un fibrato vettoriale F con risoluzione

$$0 \to \mathcal{O}(-1)^s \xrightarrow{M} \mathcal{O}^t \to F \to 0$$

dove M è una matrice di forme lineari. Dimostriamo che se

$$(*) \qquad \chi(\operatorname{End} F) = s^2 + t^2 - (n+1)st \leq 1$$

allora il fibrato F, associato alla generica matrice M, è semplice. Se invece

$$\chi(\operatorname{End} F) = s^2 + t^2 - (n+1)st > 1,$$

si possono presentare due casi

- il fibrato F è eccezionale (cioè semplice e con $\operatorname{Ext}^i(\operatorname{End} F) = 0$ per ogni $i > 0$) e in questo caso i numeri s e t sono dati dalla sottosuccessione dispari della successione di Fibonacci,
- oppure F è non semplice e isomorfo a una somma diretta di due fibrati di Steiner semi–eccezionali. In questo caso la matrice M si può scrivere a blocchi le cui dimensioni sono multipli di opportuni numeri di Fibonacci. Possiamo chiamare questa scrittura "forma canonica" della matrice.

Nel caso di $\mathbb{P}^2$, infine, un risultato di Drezet ci permette di concludere che la condizione $(*)$ è anche condizione necessaria e sufficiente per la stabilità del generico fibrato di Steiner non eccezionale.