Rimini, 18 maggio 2004

Fibrati di Steiner e numeri di Fibonacci

Maria Chiara Brambilla

Fibrati di Steiner su $\mathbb{P}^n$:

Definizione 1. *(Dolgachev e Kapranov, 1993) fibrati che ammettono una risoluzione del tipo*

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)^s \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^t \to F \to 0.$$

Oss: $\operatorname{rk} F = t - s \geq n$.

- Se $\operatorname{rk} F = n$, sappiamo che F è stabile e quindi semplice. (Ancona e Ottaviani)

- Se $\operatorname{rk} F > n$, vogliamo caratterizzare quando F è semplice (e/o stabile).

Ricordiamo che un fibrato F su $\mathbb{P}^n$ si dice

- **semplice** se

$$\mathrm{h}^0(\mathrm{End}\, F) = 1,$$

cioè se i suoi unici endomorfismi sono le omotetie;

- **stabile** (secondo Mumford–Takemoto) se ogni suo sotto–fascio coerente proprio $\mathcal{F}$ è tale che

$$\mu(\mathcal{F}) < \mu(F),$$

dove $\mu(F) = \frac{c_1(F)}{\mathrm{rk}(F)}$ è la *pendenza* di F;

- **semi–stabile** se nelle stesse ipotesi

$$\mu(\mathcal{F}) \leq \mu(F).$$

Un fibrato di Steiner su $\mathbb{P}(V)$ è il conucleo di un morfismo di fasci

$$m : I \otimes \mathcal{O}(-1) \to W \otimes \mathcal{O}.$$

Scelta una base, m si rappresenta come una matrice rettangolare le cui entrate sono polinomi omogenei di primo grado, ovvero come una matrice tridimensionale

$$M \in \mathrm{Hom}(I \otimes \mathcal{O}(-1), W \otimes \mathcal{O}) \cong I^{\vee} \otimes W \otimes V = H.$$

Diremo che un fibrato di Steiner F è **generico** se la matrice M associata è generica nello spazio H.

Steiner semplici

Teorema 1. *Sia F un fibrato di Steiner generico su $\mathbb{P}(V)$ con* $\dim V = N \geq 3$, *allora*

$$F \text{ è semplice} \qquad \Leftrightarrow \qquad \chi(\mathrm{End}\, F) \leq 1.$$

Se F ha la risoluzione

$$0 \to \mathcal{O}(-1)^s \to \mathcal{O}^t \to F \to 0,$$

allora $\chi(\mathrm{End}\, F) = s^2 + t^2 - Nst$.

Dimostrazione:
$\Rightarrow$ è facile;
$\Leftarrow$ è suddivisa in più parti.
In generale non è vero. Controesempio:

$$0 \to \mathcal{O}(-2) \oplus \mathcal{O}(-1)^4 \to \mathcal{O}^{16} \to G \to 0,$$

dove $\chi(\mathrm{End}\, G) = -3$, ma $\mathrm{h}^0(\mathrm{End}\, G) = 5$.

La condizione $\chi(\operatorname{End} F) \le 1$ si divide in

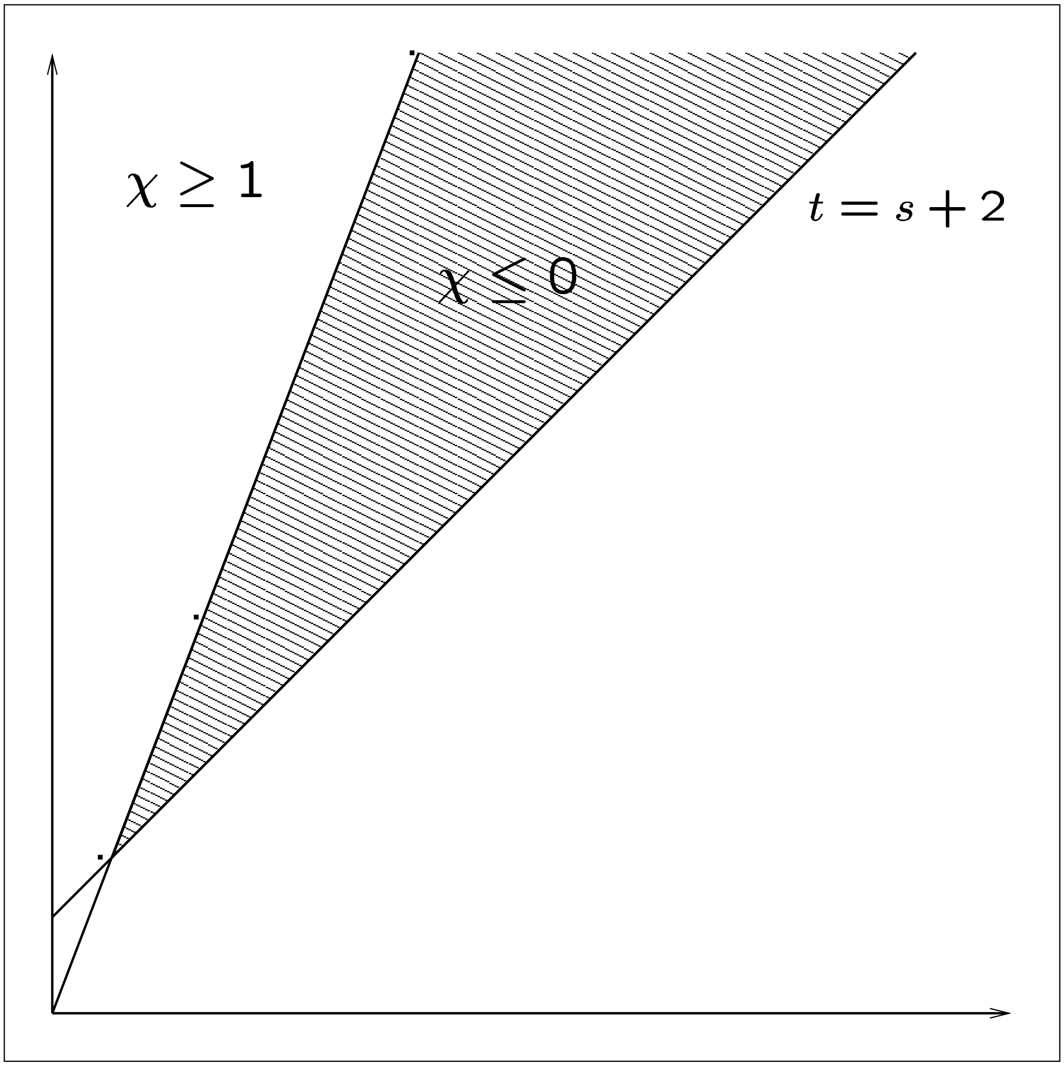
(i) $\chi(\operatorname{End} F) = 1$, oppure

(ii) $\chi(\operatorname{End} F) \le 0$, ovvero $t \le \frac{N+\sqrt{N^2-4}}{2} s$.

Nel caso $\chi(\operatorname{End} F) = 1$, $(s,t) = (a_{k-1}, a_k)$, dove

$$a_k = \frac{\left(\frac{N+\sqrt{N^2-4}}{2}\right)^k - \left(\frac{N-\sqrt{N^2-4}}{2}\right)^k}{\sqrt{N^2-4}},$$

e i fibrati si dicono **eccezionali**.
Quando $N = 3$ la successione $\{a_k\}$ è la parte dispari della successione di Fibonacci. Perciò chiamiamo i numeri $\{a_k\}$ **numeri di Fibonacci generalizzati**.



Caso $\mathbb{P}^2$, $N = 3$.

Fibrati eccezionali

- 1985, Drézet e Le Potier,
- scuola russa (Rudakov, Gorodentsev,. . .).

Definizione 2. *Un fibrato F su $\mathbb{P}^n$ si dice eccezionale se*

$$\mathrm{h}^0(\mathrm{End}\, F) = 1$$

e

$$\mathrm{h}^i(\mathrm{End}\, F) = 0 \textit{ per ogni } i > 0.$$

Steiner eccezionali:

$$0 \to \mathcal{O}(-1)^{a_{k-1}} \to \mathcal{O}^{a_k} \to E_k \to 0.$$

Dimostrazione nel caso $\chi(\mathrm{End}\, F) \leq 0$:
Azione del gruppo:

$$\mathsf{GL}(s) \times \mathsf{GL}(t) \times H \to H$$

$$(A, B, M) \mapsto A^{-1} M B$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{O}(-1)^s \arrow[r] \arrow[d, "A"] & \mathcal{O}^t \arrow[r] \arrow[d, "B"] & F \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}(-1)^s \arrow[r] & \mathcal{O}^t \arrow[r] & F \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

(a) Se $\dim \mathsf{Stab}(M) = 1$, allora F è semplice.

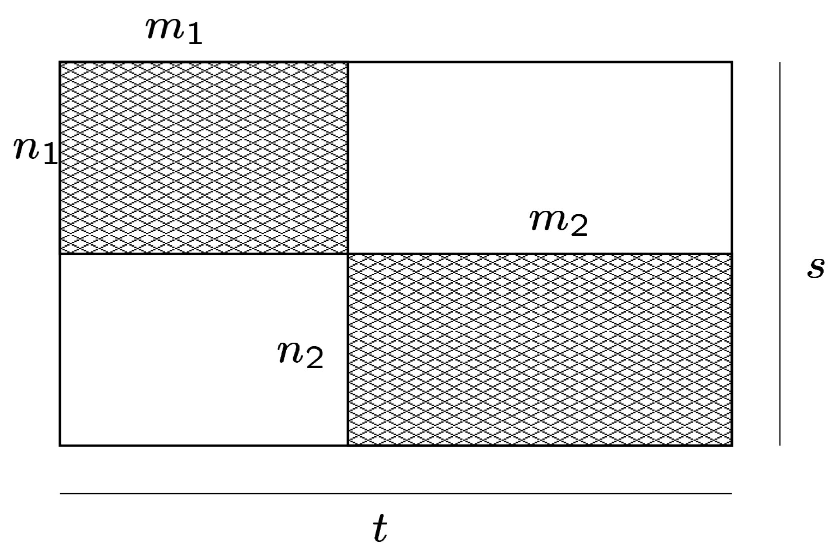
(b) Diagramma d'incidenza:

$$\begin{tikzcd}
& S = \{A, B, M : A^{-1} M B = M\} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\mathsf{GL}(s) \times \mathsf{GL}(t) & & H
\end{tikzcd}$$

se $(A, B) \neq (\lambda\,\mathsf{Id}, \lambda\,\mathsf{Id})$, l'insieme $\pi_2 \pi_1^{-1}(G_{AB})$ è contenuto in un chiuso di Zariski strettamente contenuto in H.

(b1) Se M è generica e $(A, B) \in \mathsf{Stab}(M)$, allora A e B hanno gli stessi autovalori.

(b2) Se $A, B \neq (\lambda\,\mathrm{Id}, \lambda\,\mathrm{Id})$, M è della forma



(b3) Nelle nostre ipotesi, una matrice equivalente a una di questa forma non è generica.

Steiner non semplici

Teorema 2. *Se* $t > \frac{N+\sqrt{N^2-4}}{2}s$, *allora il generico fibrato di Steiner con risoluzione*

$$0 \to \mathcal{O}(-1)^s \to \mathcal{O}^t \to F \to 0, \qquad (1)$$

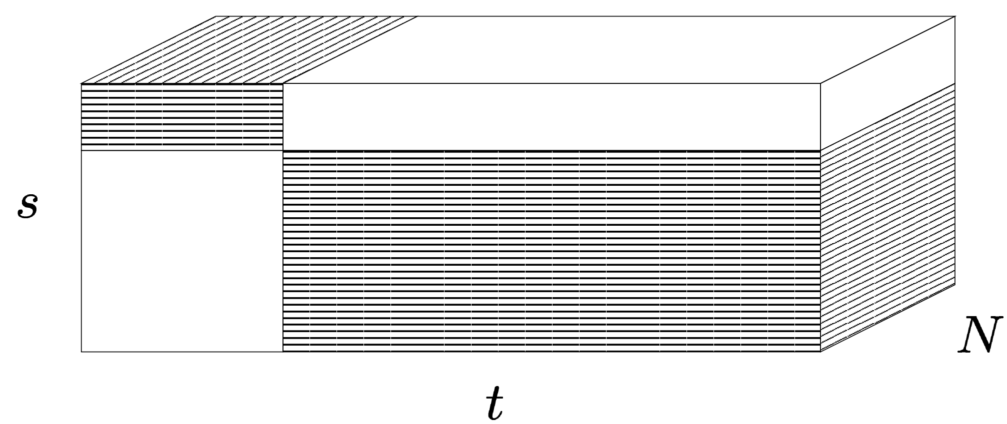
è isomorfo a un fibrato $E_k^n \oplus E_{k+1}^m$, *dove* E_k, E_{k+1} *sono fibrati di Steiner eccezionali e* n, m *sono opportuni numeri naturali.*

Dimostrazione:

- esistono k, n, m tali che $E_k^n \oplus E_{k+1}^m$ ammette risoluzione (1), con matrice associata $\overline{M}$,

- l'orbita di $\overline{M}$ ha dimensione uguale alla dimensione di H.

Il teorema 2 si può riformulare nel linguaggio delle matrici in questo modo:
quando $t > \frac{N+\sqrt{N^2-4}}{2}s$, una matrice $s \times t \times N$ è equivalente per l'azione di $\mathsf{GL}(s) \times \mathsf{GL}(t)$ ad una matrice della forma



dove le dimensioni dei blocchi non nulli sono opportuni multipli di due "numeri di Fibonacci generalizzati" consecutivi a_k e a_{k+1}.

Generalizzazioni

- Applicando un risultato di Drézet del 1999, sappiamo che su $\mathbb{P}^2$ un fibrato è stabile se e solo se è genericamente semplice.
  Il teorema 1 caratterizza dunque anche la stabilità dei fibrati di Steiner su $\mathbb{P}^2$.

- I teoremi 1 e 2 si possono generalizzare al caso di fibrati su $\mathbb{P}^n$ con risoluzione

$$0 \to \mathcal{O}(-k)^s \to \mathcal{O}^t \to F \to 0,$$

  per ogni $1 \leq k \leq n$.

Ulteriori sviluppi ...

Per fibrati su $\mathbb{P}^2$ con risoluzione

$$0 \to \mathcal{O}(-2) \oplus \mathcal{O}(-1)^s \to \mathcal{O}^t \to F \to 0,$$

- $\chi(\mathrm{End}\, F) \leq 1 \not\Rightarrow F$ semplice,

- $\chi(\mathrm{End}\, F) = 1 \Leftrightarrow F$ eccezionale,

- F eccezionale $\Leftrightarrow (s,t) = (3r_k a_k, 3r_k a_{k+1})$, dove $r_k = a_k - a_{k-1}$.

- è possibile caratterizzare i fibrati semplici in funzione di s e t.

Problema: Studiare il caso

$$0 \to \mathcal{O}(-2)^q \oplus \mathcal{O}(-1)^s \to \mathcal{O}^t \to F \to 0.$$