Congettura di Mukai generalizzata per varietà di Fano speciali

X varietà proiettiva complessa liscia
$\dim X = n$
X *varietà di Fano*: $-K_X$ ampio

- *numero di Picard* di X

$$\rho_X = \dim N_1(X)$$

- *indice* di X

$$r_X = \max\{m \in \mathbb{N} \mid -K_X = mL\}$$

L fibrato lineare ampio

- *pseudoindice* di X

$$i_X = \min\{m \in \mathbb{N} \mid -K_X \cdot C = m\}$$

$C \subset X$ curva razionale

$$r_X \leq i_X \leq n+1$$

Congettura A (Mukai 1988)

$$\rho_X(r_X - 1) \leq n$$

(1990) Wiśniewski $\quad i_X > \frac{n+2}{2} \Rightarrow \rho_X = 1$

Congettura B (BCDD 2002)

$$\rho_X(i_X - 1) \leq n$$

e = se e solo se $X \simeq (\mathbb{P}^{i_X-1})^{\rho_X}$

(2002) Bonavero, Casagrande, Debarre, Druel

- $n = 4$
- X torica e $i_X \geq \frac{n+3}{3}$
- X torica e $n \leq 7$
- X Fano omogenea

(2003) Andreatta, Chierici, Occhetta

- $n = 5$
- $i_X \geq \frac{n+3}{3}$ e X "speciale"

X "speciale" = su X c'è una famiglia di curve razionali covering e non spezzante.

In particolare X è speciale se:

- $i_X \geq \frac{n+3}{3}$ e X ha una contrazione fibrata o non ha contrazioni piccole,

- $n \geq 6$ e $i_X = n - 3$.

Classificazione di NE(X)

(2004) Chierici, Occhetta

X varietà di Fano di dimensione $n \geq 5$,
$i_X = n - 3$, $\rho_X \geq 2$
$\Rightarrow$ NE(X) è generato da ρ_X raggi.

Le contrazioni associate a tali raggi sono come in tabella.
Tutti i casi sono effettivi, e quelli contrassegnati da (*) sono classificati:

$$X \simeq Bl_S\mathbb{P}^5, \qquad S = \begin{cases} \mathbb{Q}^2 \\ \text{scroll cubico} \subset \mathbb{P}^4 \\ \text{superficie di Veronese} \end{cases}$$

$\dim X$	ρ_X	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5
5	2	F	F			
		F	D_0			
		F	D_1			
		F	D_2			
		F	S			
	(*)	D_2	D_2			
	(*)	D_2	S			
	3	F	F	F		
		F	F	S		
		F	F	D_1		
		F	F	D_2		
		F	D_2	D_2		
	4	F	F	F	F	
		F	F	F	D_2	
	5	F	F	F	F	F
6	2	F	F			
		F	D_1			
		F	D_2			
		F	S			
	3	F	F	F		
7	2	F	F			
		F	D_2			
8	2	F	F			

Curve razionali

$\mathrm{Hom}_{bir}(\mathbb{P}^1, X) \subset \mathrm{Hom}(\mathbb{P}^1, X)$
aperto che parametrizza i morfismi $\mathbb{P}^1 \to X$ birazionali sull'immagine

$\mathrm{Ratcurves}^n(X)$ quoziente di $\mathrm{Hom}^n_{bir}(\mathbb{P}^1, X)$ per l'azione di $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$

$\mathrm{Univ}(X)$ quoziente di $\mathrm{Hom}^n_{bir}(\mathbb{P}^1, X) \times \mathbb{P}^1$ per l'azione prodotto

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Univ}(X) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\pi"'] & X \\
\mathrm{Ratcurves}^n(X) &
\end{tikzcd}$$

Famiglia di curve razionali: $V \subset \mathrm{Ratcurves}^n(X)$ componente irriducibile

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\pi"'] & X \\ V & \end{tikzcd}$$

$\mathrm{Locus}(V) = \overline{i(U)}$
V *covering* se $\mathrm{Locus}(V) = X$

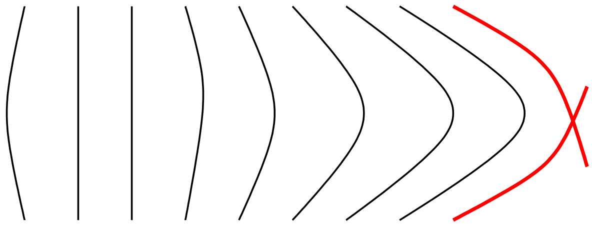
Famiglia puntata: $V_x = \pi(i^{-1}(x))$

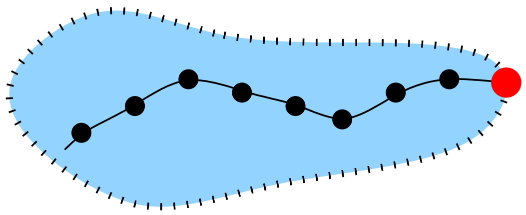
$$\begin{tikzcd} U_x \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\pi"'] & X \\ V_x & \end{tikzcd}$$

$\mathrm{Locus}(V_x) = \overline{i(U_x)}$

V non spezzante $\Longleftrightarrow$ V propria in $\mathrm{Ratcurves}^n(X)$

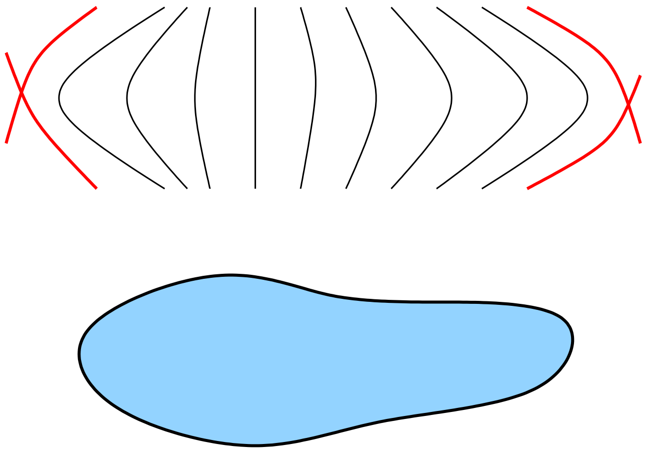
$\mathrm{Ratcurves}^n(X) \hookrightarrow \mathrm{Chow}(X)$





V localmente non spezzante $\Longleftrightarrow$
V_x propria per x generico in $\mathrm{Locus}(V)$

Famiglia Chow di curve razionali: $\mathcal{V} \subset \mathrm{Chow}(X)$ componente irriducibile che parametrizza 1-cicli connessi razionali



Famiglia Chow associata a V:

$$V \rightsquigarrow \mathcal{V} \subset \mathrm{Chow}(X)$$

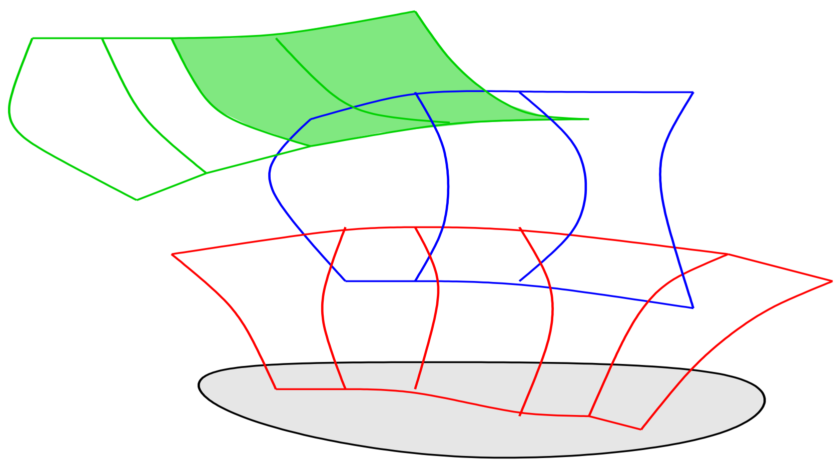
V non spezzante si confonde con $\mathcal{V}$

Catene di curve

$Y \subseteq X$ chiuso, $\mathcal{V}^1, \ldots, \mathcal{V}^k$ famiglie Chow

$\mathrm{Locus}(\mathcal{V}^1, \ldots, \mathcal{V}^k)_Y$:
punti $x \in X$ t.c. esistono cicli $C_1, \ldots, C_k$
- C_i appartiene a $\mathcal{V}^i$
- $C_i \cap C_{i+1} \neq \emptyset$
- $C_1 \cap Y \neq \emptyset$ e $x \in C_k$

$\mathrm{ChLocus}_m(\mathcal{V}^1, \ldots, \mathcal{V}^k)_Y$:
punti $x \in X$ t.c. esistono cicli $C_1, \ldots, C_m$
- C_i appartiene a $\mathcal{V}^j$
- $C_i \cap C_{i+1} \neq \emptyset$
- $C_1 \cap Y \neq \emptyset$ e $x \in C_m$



Fibrazioni RC

$\mathcal{V}^1, \dots, \mathcal{V}^k$ famiglie Chow

x e y sono rc($\mathcal{V}^1, \dots, \mathcal{V}^k$)-equivalenti se $x = y$ oppure esiste una catena di curve in $\mathcal{V}^1, \dots, \mathcal{V}^k$ che unisce x e y, i.e. esiste m t.c. $y \in \mathrm{ChLocus}_m(\mathcal{V}^1, \dots, \mathcal{V}^k)_x$.

Teorema (Campana - Kollár) *Esistono un aperto $X^0 \subset X$ e un morfismo proprio a fibre connesse $\pi : X^0 \to Z^0$ tali che*
- *le fibre di π sono classi di equivalenza;*
- *$\forall\ z \in Z^0$ due punti in $\pi^{-1}(z)$ sono connessi da al più $2^{n-\dim Z^0} - 1$ cicli in $\mathcal{V}^1, \dots, \mathcal{V}^k$.*

π è detta *fibrazione rc($\mathcal{V}^1, \dots, \mathcal{V}^k$)*.
X è *razionalmente connessa* rispetto a $\mathcal{V}^1, \dots, \mathcal{V}^k$ se $\dim Z^0 = 0$.

Limiti per ρ_X

Lemma. *$Y \subset X$ chiuso, $\mathcal{V}$ famiglia Chow, $C \subseteq \mathrm{Locus}(\mathcal{V})_Y$ curva. Allora*

$$C \equiv aC_Y + bC_{\mathcal{V}}$$

$a, b \in \mathbb{Q}$, $C_Y \subset Y$ e $C_{\mathcal{V}}$ ciclo di $\mathcal{V}$ che taglia Y.

Applicazione:

$$F = \mathrm{ChLocus}_M(\mathcal{V}^1, \ldots, \mathcal{V}^k)_x$$

ogni curva $\subseteq F$ si scrive come combinazione lineare dei cicli di $\mathcal{V}^1, \ldots, \mathcal{V}^k$.

Corollario. *X razionalmente connessa rispetto a $\mathcal{V}^1, \ldots, \mathcal{V}^k$ famiglie Chow.*
Allora $N_1(X)$ è generato dalle classi delle componenti irriducibili dei cicli in $\mathcal{V}^1, \ldots, \mathcal{V}^k$.
In particolare, se $\mathcal{V}^1, \ldots, \mathcal{V}^k$ sono non spezzanti, allora $\rho_X \leq k$.

Stime dimensionali

Proposizione (Ionescu-Wiśniewski)
V famiglia localmente non spezzante, $x \in \mathrm{Locus}(V)$ generico. Allora

$$\deg V \leq \dim \mathrm{Locus}(V_x) + 1.$$

Inoltre, se $\deg V = \dim \mathrm{Locus}(V_x) + 1$ *allora V è covering.*

Lemma. *$Y \subseteq X$ chiuso, $V^1, \ldots, V^k$ famiglie non spezzanti, tra loro indipendenti e "indipendenti da Y". Se* $\mathrm{Locus}(V^1, \ldots, V^k)_Y \neq \emptyset$ *allora*

$$\dim \mathrm{Locus}(V^1, \ldots, V^k)_Y \geq \dim Y + \sum \deg V^i - k$$

Curve razionali su varietà di Fano

Teorema (Mori) *Per ogni* $x \in X$ *passa* C *razionale con* $-K_X \cdot C \leq n+1$.

Osservazione. Le famiglie $V^i \subset \mathrm{Ratcurves}^n(X)$ che contengono curve razionali di grado $\leq n+1$ sono in numero finito

$$\Rightarrow \text{esiste } i \text{ t.c. } \mathrm{Locus}(V^i) = X.$$

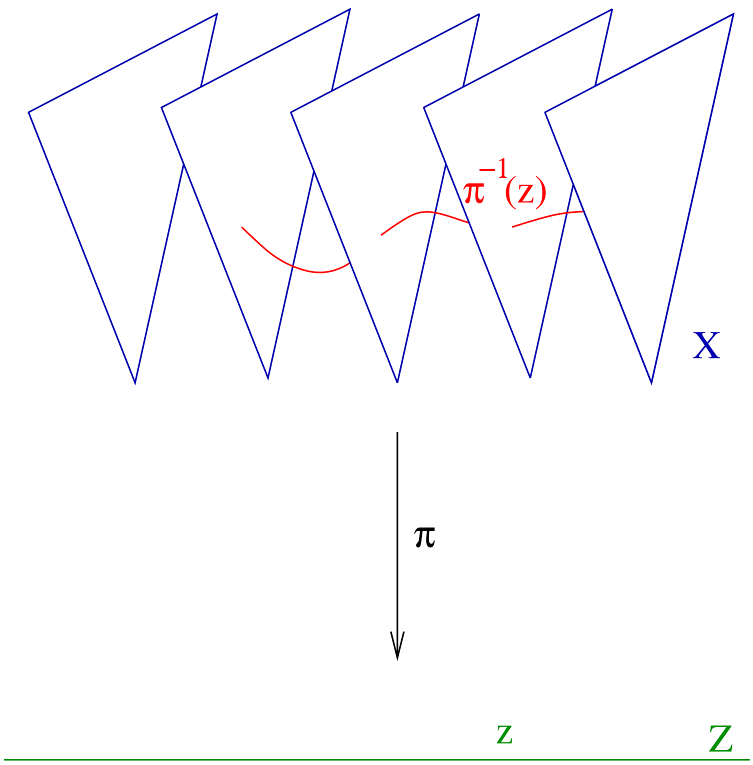
Tra queste, V di grado minimo è una *minima famiglia covering*.

In particolare è localmente non spezzante.

Teorema (KMM) *X Fano, $\pi : X^0 \to Z^0$ morfismo suriettivo proprio, $z \in Z^0$ generico. Esiste C curva razionale su X t.c.*

- $C \cap \pi^{-1}(z) \neq \emptyset$
- $C \not\subseteq \pi^{-1}(z)$
- $-K_X \cdot C \leq n+1$.

C è detta *curva orizzontale*.



Osservazione. Le famiglie $V^i \subset \mathrm{Ratcurves}^n(X)$ che contengono curve razionali orizzontali di grado $\leq n+1$ sono in numero finito

$\Rightarrow$ esiste i t.c. $\mathrm{Locus}(V^i)$ domina Z^0.

Tra queste, V di grado minimo è una *minima famiglia orizzontale dominante* per π.

- V è localmente non spezzante
- le curve di V sono indipendenti dalle curve contratte da π
- $x \in \mathrm{Locus}(V)$ generico, F fibra per x

$$\dim(F \cap \mathrm{Locus}(V_x)) = 0.$$

Varietà di Fano speciali

Teorema. *X Fano, $i_X \geq \frac{n+3}{3}$. Se esiste V non spezzante e covering, allora la congettura B è vera per X.*

Dim. $\pi : X^0 \to Z^0$ fibrazione rc$V$.

Se $\dim Z^0 = 0$ allora $\rho_X = 1$ e la congettura è vera ($i_X \leq n+1$).

Altrimenti esiste V' minima orizzontale dominante, ed è localmente non spezzante.

$$F \supseteq \mathrm{Locus}(V_x) \quad \Rightarrow \quad \dim F \geq \deg V - 1$$

$$\dim(F \cap \mathrm{Locus}(V'_x)) = 0$$

$n \geq \dim F + \dim \mathrm{Locus}(V'_x) \geq \deg V + \deg V' - 2,$

quindi $\deg V' \leq 2i_X - 1$ e V' è non spezzante.

$\pi' : X' \to Z'$ fibrazione rc(V, V')

Se $\dim Z' = 0$ allora $\rho_X = 2$.
Possiamo supporre $i_X \leq \frac{n+2}{2}$ [Wi90] e la congettura è vera.

Altrimenti esiste V'' minima orizzontale dominante, ed è localmente non spezzante.

$$F' \supseteq \mathrm{Locus}(V, V')_y = \mathrm{Locus}(V)_{\mathrm{Locus}(V'_y)}$$

$$\dim F' \geq \deg V + \deg V' - 2$$

$$\dim(F' \cap \mathrm{Locus}(V''_y)) = 0$$

$$n \geq \dim F' + \dim \mathrm{Locus}(V''_y) \geq \deg V + \deg V' + \deg V'' - 3,$$

$$\deg V = \deg V' = \deg V'' = i_X$$

$$\dim \mathrm{Locus}(V_y) = \dim \mathrm{Locus}(V'_y) = \dim \mathrm{Locus}(V''_y) = i_X - 1$$

V, V', V'' covering
X rc(V, V', V'')-connessa $\Rightarrow$ $X \simeq (\mathbb{P}^{i_X - 1})^3$. $\square$

Contrazioni di Fano-Mori

X Fano $\Rightarrow$ il cono $\mathrm{NE}(X) \subseteq N_1(X)$ generato dalle classi delle curve irriducibili è poliedrale (Teorema del Cono).

Faccia estremale di $\mathrm{NE}(X) \Leftrightarrow$
morfismo $\varphi : X \to Y$ a fibre connesse che contrae le curve le cui classi stanno nella faccia (Teorema di Contrazione).

contrazione estremale = morfismo associato a una faccia estremale.

Le contrazioni estremali si dividono in:

- *fibrate* se $\dim X > \dim Y$;
- *divisoriali* se il luogo eccezionale di φ è un divisore;
- *piccole* se il luogo eccezionale di φ ha codimensione ≥ 2 in X.

Teorema. *X Fano, $i_X \geq \frac{n+3}{3}$, $\rho_X > 1$; se*
(a) X ha contrazioni fibrate
oppure
(b) X non ha contrazioni piccole
allora esiste su X una famiglia covering non spezzante.

(a) Se su X esiste una contrazione fibrata $\varphi : X \to W$, la fibra generica F è Fano
$\Rightarrow$ esiste su ogni F una famiglia covering V_F di grado $\leq \dim F + 1$.

V_φ famiglia minima orizzontale dominante:

$$\deg V_\varphi \leq \dim W + 1 \leq n - \dim F + 1$$

$$\Rightarrow \ \dim F \leq 2i_X - 2$$

quindi V_F è unsplit.

Le V_F sono in numero finito e coprono X
$\Rightarrow$ ne esiste una covering.

(b) Per assurdo, X ammetta solo contrazioni divisoriali e non esista una famiglia covering non spezzante.
V famiglia minima covering $\Rightarrow$ X è razionalmente connessa rispetto a $\mathcal{V}$.

Problema: Limitare il numero di spezzamenti (indipendenti) possibili di $\mathcal{V}$.

Strategia: Considerare le famiglie delle componenti dei cicli di $\mathcal{V}$, supporre che siano troppe e usare la razionale connessione di X e le stime dimensionali per giungere a un assurdo.

Classificazione di NE(X) per $n \geq 6$

Ipotesi: $n \geq 6$, $\rho_X \geq 2$, $i_X = n-3$.

• Se X ha una famiglia V covering e localmente non spezzante, V è non spezzante $\Rightarrow$ vale congettura B.

$$\begin{cases} n=6 & \rho_X \leq 2 & \text{tranne } X \simeq (\mathbb{P}^2)^3 \\ n=7 & \rho_X \leq 2 & \\ n \geq 8 & \rho_X = 1 & \text{tranne } X \simeq (\mathbb{P}^4)^2 \end{cases}$$

• Se $\rho_X = 2$ almeno una contrazione è fibrata: altrimenti c'è una contrazione piccola, con F fibra di dimensione $n-2$ $\Rightarrow$
si dimostra che $D = \mathrm{Locus}(V)_F$ è effettivo e numericamente banale su NE(X).