Superfici lisce di $\mathbf{P}^4$ contenenti una curva piana e un'applicazione.

CHIARA FOLEGATTI

I risultati di cui parlerò nel mio seminario di oggi si trovano in due lavori, uno dei quali fatto in collaborazione con Ph. Ellia.
Si lavora su un campo algebricamente chiuso di caratteristica zero.
I risultati principali sono:

TEOREMA 1:
Sia $\Sigma \subset \mathbf{P}^4$ un'ipersuperficie di grado s con un piano singolare di molteplicità $(s-2)$. Allora il grado delle superfici lisce $S \subset \Sigma$ con $q(S) = 0$ è limitato da una funzione di s.

TEOREMA 2:
Sia $S \subset \mathbf{P}^4$ una superficie liscia con $q(S) = 0$, contenuta in una ipersuperficie quartica Σ con luogo singolare di dimensione due. Allora $d = deg(S) \leq 26$.

L'ipotesi $q(S) = 0$ è dovuta a ragioni tecniche. In effetti si usa solo in un punto specifico della dimostrazione e crediamo che non sia strettamente necessaria. Inoltre c'è una famosa congettura che dice che $q(S) \leq 2$, quindi si pensa che quelle con $q(S) = 0$ costituiscano la maggior parte delle superfici di $\mathbf{P}^4$.

Forse non è chiaro il collegamento tra il titolo del seminario e gli enunciati che ho scritto. Ora dimostrerò un lemma che renderà più chiare le ipotesi dei due teoremi.

LEMMA 1:
Se $S \subset \mathbf{P}^4$ è una superficie liscia contenuta in una ipersuperficie Σ di grado s, avente un piano di molteplicità $(s-2)$, allora S contiene una curva piana oppure $h^0(\mathcal{I}_S(2)) \neq 0$.

Dim: Sia Π il piano di molteplicità $(s-2)$ in Σ, allora per ogni iperpi-

ano $H \supset \Pi$: $H \cap \Sigma = (s-2)\Pi \cup Q_H$, dove Q_H è una superficie quadrica e la sezione iperpiana $C = S \cap H \subset (s-2)\Pi \cup Q_H$.
Se $dim(C \cap \Pi) = 0$, allora $C \subset Q_H$, cioè $h^0(\mathcal{I}_C(2)) \neq 0$ e quindi anche $h^0(\mathcal{I}_S(2)) \neq 0$.
Se $dim(C \cap \Pi) = 1$, allora c'è una componente di C nel piano Π che chiameremo P e questa è la curva piana che stavamo cercando.$\diamondsuit$

D'ora in poi supporremo sempre $h^0(\mathcal{I}_S(2)) = 0$ (altrimenti $d \leq 2s$ e abbiamo già il bound su d), quindi nelle ipotesi dei teoremi la superficie S conterrà sempre una curva piana.

INTERESSE:
Il TEOREMA 2 è di qualche interesse nella classificazione delle superfici non di tipo generale in $\mathbf{P}^4$, infatti è noto che tali superfici giacciono su ipersuperfici di grado basso. Il caso $s = 4$ è il primo caso interessante da analizzare. L'idea di studiare superfici contenenti una curva piana è dovuta al fatto che tutte le superfici razionali note ne contengono una (questo è stato osservato da Catanese e Hulek). Quindi volevamo vedere se questo poteva essere generalizzato a superfici non di tipo generale. La risposta è negativa, infatti si può mostrare che tra le sezioni del fibrato di Horrocks-Mumford ci sono superfici lisce contenenti una curva piana (che è una cubica liscia), ma la generica tra queste non ne contiene nessuna.

Osservazione:
1) L'ipotesi $q(S) = 0$ implica che tutte le sezioni iperpiane di S sono linearmente normali in $\mathbf{P}^3$.
Infatti se guardiamo la successione esatta $0 \to \mathcal{I}_S \to \mathcal{I}_S(1) \to \mathcal{I}_C(1) \to 0$ e ne prendiamo la coomologia $\ldots \to H^1(\mathcal{I}_S(1)) \to H^1(\mathcal{I}_C(1)) \to H^2(\mathcal{I}_S) \to \ldots$ abbiamo: $h^1(\mathcal{I}_S(1)) = 0$ per Severi, $h^2(\mathcal{I}_S) = q(S) = 0$ e quindi $h^1(\mathcal{I}_C(1)) = 0$.
2) Il TEOREMA 2 rappresenta una specie di raffinamento del TEOREMA 1, perché in questo caso si dà un bound effettivo. Inoltre nel caso delle ipersuperfici quartiche è sufficiente supporre $dim(Sing(\Sigma)) = 2$. Questo, insieme all'ipotesi $q(S) = 0$, assicura che il luogo singolare di Σ sia un piano (o un'unione di piani) di molteplicità $(s-2)$.
Questo spiega la differenza tra i due teoremi, che sono in realtà la stessa cosa, infatti la dimostrazione è una sola.

NOTAZIONI:

-Sia $S \subset \mathbf{P}^4$ una superficie liscia e sia $d = deg(S)$,
-P sia la curva piana contenuta in S, $p = deg(P)$,
-Π sia il piano di P e supponiamo che P sia la parte 1-dim. di $S \cap \Pi$,
-δ sia il sistema lineare segato su S, residualmente a P, dagli iperpiani contenenti Π, risulta poi che $\delta = |H - P|$ (su S). Infatti se $p \geq 2$ i piani che contengono P sono gli stessi che contengono Π, inoltre per Severi $H^0(\mathcal{O}_S(1)) \cong H^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^4}(1))$ (se S non è la Veronese). Se $p = 1$ scegliamo un piano $\Pi \supset P$ arbitrariamente e δ sarà un pencil in $|H - P|$.
-sia $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\delta)$ il luogo base di δ.
-Chiameremo Y_H l'elemento di δ segato da H e C_H (o semplicemente C) la sezione iperpiana corrispondente all'iperpiano H.

Ora dimostrerò un lemma cruciale per il seguito.

<u>LEMMA 2:</u>
P è ridotta e il luogo base $\mathcal{B}$ di δ è vuoto o zero-dimensionale e contenuto in Π. La generica $Y_H \in \delta$ è liscia fuori da Π e non ha componenti in Π.

<u>*Dim:*</u> È chiaro che $\mathcal{B} \subset \Pi$ perchè l'intersezione degli iperpiani che contengono Π è solo Π.
Sia P_1 una componente irriducibile di P contenuta in $\mathcal{B}$. Allora $\forall H \supset \Pi$, $C_H = H \cap S$ è singolare lungo P_1. Ne segue che $T_x S \subset H$, $\forall x \in P_1$ e $\forall H \supset \Pi$ (qui è necessaria l'ipotesi S liscia).
Otteniamo che $T_x S = \Pi$ $\forall x \in P_1$, ma questo contraddice il teorema di Zak, che afferma che la mappa di Gauss è finita.
Con un argomento simile si mostra che P è ridotta.
Si conclude con il teorema di Bertini.$\diamondsuit$

<u>Osservazione:</u>
1) La conseguenza principale del LEMMA 2 è che per ogni $H \supset \Pi$: $C_H = S \cap H = Y_H \cup P$.
2) Sappiamo cheδ è un pencil e che il suo luogo base ha dimensione ≤ 0, quindi $deg(\mathcal{B}) = (H-P)^2 = d - 2p + P^2$. Si può anche dare una descrizione geometrica di $\mathcal{B}$. Si dimostra infatti che $\mathcal{B} = \mathcal{R}$, dove $\mathcal{R}$ è lo schema residuo di $S \cap \Pi$ rispetto a P.
$\mathcal{R}$ è la parte 0-dimensionale di $S \cap \Pi$.
In termini di ideali: $\mathcal{I}_{\mathcal{R}} = (\mathcal{I}_{S \cap \Pi} : \mathcal{I}_P)$.
D'ora in poi chiameremo sempre il luogo base $\mathcal{R}$. Poniamo $r = deg(\mathcal{R})$.

<u>TRACCIA DELLA DIM. DEI TEOREMI 1 E 2:</u>

Sia Σ l'ipersuperficie di grado s, Π il piano di molteplicità $(s-2)$ in Σ, P la curva piana $\subset S$ e supponiamo che P sia tutta la parte 1-dimensionale di $S \cap \Pi$.
Per ogni iperpiano $H \supset \Pi$: $C = S \cap H$ è una curva contenuta in $(s-2)\Pi \cup Q_H$, dove Q_H è una superficie quadrica. Dal LEMMA 2 segue che $C = Y_H \cup P$, con $Y_H \subset Q_H$, quindi $h^0(\mathcal{I}_C(3)) \neq 0$.
L'idea è di provare a sollevare questa proprietà a S (infatti se $h^0(\mathcal{I}_S(3)) \neq 0$, allora $d \leq 3s$). Per avere questo è sufficiente avere $h^1(\mathcal{I}_C(2)) = 0$.
Infatti usando la successione esatta $0 \to \mathcal{I}_S(t) \to \mathcal{I}_S(t+1) \to \mathcal{I}_C(t+1) \to 0$, otteniamo $\ldots \to H^1(\mathcal{I}_S(1)) \to H^1(\mathcal{I}_S(2)) \to H^1(\mathcal{I}_C(2)) \to \ldots$ da cui $h^1(\mathcal{I}_S(2)) = 0$. Ora se consideriamo $0 \to H^0(\mathcal{I}_S(3)) \to H^0(\mathcal{I}_C(3)) \to H^1(\mathcal{I}_S(2)) \to \ldots$, si vede che $h^0(\mathcal{I}_S(3)) \neq 0$.

Un altro strumento importante per la dimostrazione è fornito da un risultato di Ellingsrud e Peskine: chiamiamo $\mu = c_2(\mathcal{N}_S(-s)) = d(d+s(s-4)) - s(2\pi - 2)$ (π è il genere sezionale di S). Essi hanno dimostrato che $0 \leq \mu \leq (s-1)^2 d - D(3H+K)$, dove D è la parte 1-dimensionale dell'intersezione di S con $Sing(\Sigma)$.
Nel nostro caso $P \subset D$ e la disuguaglianza è ancora vera con P al posto di D. Dopo qualche calcolo possiamo scrivere: $0 \leq \mu \leq s(s-2)d - p^2 + 2p + r$.
Questo fornisce un lower bound sul genere sezionale:

$$(A) \quad \pi - 1 \geq \frac{d^2 - 2sd + p^2 - 2p - r}{2s}$$

D'altro canto possiamo supporre che la sezione iperpiana generica di S non stia su una superficie cubica (altrimenti anche S ci starebbe e $d \leq 3s$), quindi:

$$(B) \quad \pi - 1 \leq \frac{d^2}{8}$$

L'argomento principale della dimostrazione è costituito dal lemma seguente:

<u>LEMMA 3:</u>
Se $r \leq 4$, d è limitato. In particolare se $s = 4$, $d \leq 26$.

<u>Dim:</u> Vogliamo dimostrare che $h^1(\mathcal{I}_C(2)) = 0$ (nel maggior numero di casi possibile).
Abbiamo $Y_H \cap \Pi = Y_H \cap P + \mathcal{R}$ (come divisori su Y_H) e quindi abbiamo la successione esatta: $0 \to \mathcal{I}_C(2) \to \mathcal{I}_P(2) \to \mathcal{O}_{Y_H}(1+\mathcal{R}) \to 0$, da cui: $\ldots \to H^0(\mathcal{I}_P(2)) \xrightarrow{g} H^0(\mathcal{O}_{Y_H}(1+\mathcal{R})) \to H^1(\mathcal{I}_C(2)) \to 0$.

Quindi è sufficiente dimostrare che g è suriettiva, cioè che $h^0(\mathcal{O}_{Y_H}(1+\mathcal{R})) = 4$. Se Y_H è linearmente normale, $h^0(\mathcal{O}_{Y_H}(1+\mathcal{R})) = 4$ se e solo se $\mathcal{R}$ dà condizioni indipendenti alle sezioni di $\omega_{Y_H}(-1)$.
Se la generica Q_H è liscia, sia Y_H di bigrado (a,b), con $a \leq b$. Se $a \geq 6$, Y_H è linearmente normale in $\mathbf{P}^3$ e le sezioni di $\omega_{Y_H}(-1)$ corrispondono a curve di bigrado $(a-3, b-3)$ su Q_H. Siccome $b-3 \geq a-3 \geq 3$ e $r \leq 4$, si vede che i punti di $\mathcal{R}$ danno condizioni indipendenti a queste curve. Quindi in questo caso $d \leq 3s$.
Se $a \leq 5$ si usa un altro metodo. Si dimostra che $p_a(Y_H) \leq 4(d-p-1)$, quindi $\pi - 1 \leq 4(d-p-1) + p_a(P) + Y_H P - 2$ e confrontando con la (A) si vede che d è limitato e che se $s = 4$, allora $d \leq 7$.
Se la generica Q_H è un cono quadrico e se $deg(Y_H) = d - p$ è pari, allora Y_H è intersezione completa $(\frac{d-p}{2}, 2)$ e $\omega_{Y_H} \cong \mathcal{O}_{Y_H}(\frac{d-p}{2} - 2)$. Ricordo che tutte le curve su un cono quadrico sono aCM e quindi linearmente normali. Si ragiona come nel caso precedente. Quindi se $\frac{d-p}{2} - 3 \geq 3$, allora $\mathcal{R}$ dà condizioni indipendenti alle sezioni di $\omega_{Y_H}(-1)$ e siamo a posto. Invece se $\frac{d-p}{2} - 3 < 3$, cioè $p \geq d - 11$, usando la (A) e il fatto che $r \leq 4$ otteniamo $(d-11)(d-13) \leq s(s-2)d + 4$. Per s fissato questo implica che d è limitato. Per $s = 4$ si ha $d \leq 26$.
Se $d-p$ è dispari si fa in modo analogo ma in questo caso Y_H è legato a una retta.
Se la generica Q_H è l'unione di due piani distinti, allora Y_H è l'unione di due curve piane distinte. Si ha: $p_a(Y_H) \geq (\frac{d-p}{2} - 1)(\frac{d-p}{2} - 2) - 1$, perchè il valore minimo per il genere aritmetico dell'unione di due curve piane di grado totale t è raggiunto quando le due curve hanno ognuna grado $t/2$ e se non si intersecano.
Per π abbiamo $\pi - 1 \geq (\frac{d-p}{2} - 1)(\frac{d-p}{2} - 2) - 1 + p_a(P) + Y_H P - 2$ e d'altra parte vale la (B). Confrontando queste due disuguaglianze vediamo che se $d \geq 25$ non c'è nessun valore di p che le soddisfi entrambe, quindi $d \leq 24$ $(\forall s)$.$\diamondsuit$

Per completare la dimostrazione a questo punto dobbiamo cercare di dimostrare che $r \leq 4$ (cosa che non sarà sempre vera).
Ricordo che per ogni $H \supset \Pi$ abbiamo una superficie quadrica Q_H, se restringiamo queste superfici a Π otteniamo una famiglia di coniche su Π, al variare di H: $q_H := Q_H \cap \Pi$. Sia $\mathcal{B}_q$ il luogo base di $\{q_H\}$, si dimostra che $\mathcal{B}_q$ ha molteplicità $(s-1)$ in Σ. Inoltre siccome $Y_H \subset Q_H$, abbiamo $\mathcal{R} \subset \mathcal{B}_q$.
Ora per terminare la dimostrazione si analizza cosa può succedere al luogo base delle coniche q_H. Ci sono varie possibilità:
1)$dim(\mathcal{B}_q) = 0$ (caso facile: almeno 2 coniche si intersecano propriamente,

quindi $\deg(\mathcal{B}_q) \leq 4$ e anche $r \leq 4$);
2)$dim(\mathcal{B}_q) = 1$, $q_H = q$ conica fissata per ogni $H \supset \Pi$, $q \subset S$;
3)$dim(\mathcal{B}_q) = 1$, $q_H = q$ conica fissata per ogni $H \supset \Pi$, $q \not\subset S$;
4)$dim(\mathcal{B}_q) = 1$, $q_H = D \cup D_H$ con D retta $\subset \mathcal{B}_q$, $D \subset S$;
5)$dim(\mathcal{B}_q) = 1$, $q_H = D \cup D_H$ con D retta $\subset \mathcal{B}_q$, $D \not\subset S$.
Nei casi 1,2,4 si dimostra che $r \leq 4$ e si conclude usando il LEMMA 3.
Nei casi 3,5 invece bisogna usare delle tecniche "ad hoc". In particolare il caso 5 è l'unico in cui l'ipotesi $q(S) = 0$ viene usata.

<u>*Dim. del caso 5:*</u> La retta $D \subset \mathcal{B}_q$, quindi D ha molteplicità $(s-1)$ in Σ.
Sia H un iperpiano contenente D ma non Π, allora $F = H \cap \Sigma$ è una superficie di grado s di $\mathbf{P}^3$ con una retta $(s-1)$-upla. Questo tipo di superficie è proiezione di una superficie $F' \subset \mathbf{P}^4$, di grado s.
Abbiamo che $C = S \cap H \subset F$.
In questo caso si dimostra che possiamo supporre C liscia e irriducibile, inoltre poiché $q(S) = 0$, C è linearmente normale. Ora C è proiezione di una curva $C' \subset F'$ e $C \cong C'$, quindi $\mathcal{O}_C(1) \cong \mathcal{O}_{C'}(1)$ e siccome C è linearmente normale, C' deve essere degenere e questo implica che $d = deg(C') \leq s$.$\diamondsuit$

<u>APPLICAZIONE ALLE SOTTOVARIETÀ LISCE DI CODIMENSIONE DUE DI $\mathbf{P}^n$, $n \geq 5$:</u>

Sappiamo dal teorema di Lefschetz che se $X \subset \mathbf{P}^n$, $n \geq 4$, è una sottovarietà liscia, di codimensione 2, contenuta in una ipersuperficie Σ, e se X non è intersezione completa, allora $dim(X \cap Sing(\Sigma)) \geq n - 4$.
Consideriamo quindi un caso abbastanza particolare: supponiamo che il luogo singolare di Σ sia il più grande possibile, ma allo stesso tempo il più semplice possibile. Supponiamo che $Sing(\Sigma)$ sia un sottospazio lineare di codimensione due in $\mathbf{P}^n$.
Abbiamo il risultato seguente:

<u>TEOREMA 3:</u> Sia $X \subset \mathbf{P}^n$, $n \geq 5$, una sottovarietà liscia, di codimensione due, con $Pic(X) = \mathbf{Z}H$, contenuta in una ipersuperficie Σ di grado s, singolare lungo un sottospazio lineare K di dimensione $n-2$, con molteplicità $s-2$. Allora X è intersezione completa.

<u>Osservazione:</u>
1) L'ipotesi $Pic(X) = \mathbf{Z}H$ è sempre verificata se n è almeno 6, grazie al teorema di Barth;
2) Questo risultato ci fornisce anche un'ulteriore conferma della congettura

di Hartshorne in codimensione due.

IDEA DELLA DIM. DEL TEOREMA 3:
Sia H un generico $\mathbf{P}^4$ in $\mathbf{P}^n$: $S := X \cap H$ è una superficie liscia, sottocanonica, in $H \cong \mathbf{P}^4$. La superficie S è contenuta nell'ipersuperficie $F := \Sigma \cap H$, di grado s, avente un piano di molteplicità $(s-2)$: $\Pi := K \cap H$.
Inoltre si ha che automaticamente $q(S) = 0$.
Infatti se H' è un generico $\mathbf{P}^5$ contenente H, $T := X \cap H'$ è un threefold liscio di cui S è sezione iperpiana. Abbiamo $0 \to \mathcal{O}_T(-1) \to \mathcal{O}_T \to \mathcal{O}_S \to 0$.
Ora $h^1(\mathcal{O}_T) = 0$ per il teorema di Barth poiché T è un threefold liscio di $\mathbf{P}^5$, $h^2(\mathcal{O}_T(-1)) = h^1(\omega_T(1)) = 0$ per Kodaira, quindi anche $h^1(\mathcal{O}_S) = q = 0$.
Quindi siamo esattamente nella situazione della prima parte del seminario, e ne segue che la superficie S contiene una curva piana: P.
Gli ingredienti principali della dimostrazione sono a questo punto i due lemmi seguenti:

LEMMA 4:
Sia $T \subset \mathbf{P}^5$ un threefold liscio, sottocanonico, di grado d. Se $d \leq 25$, allora T è intersezione completa.

LEMMA 5:
Con le notazioni precedenti, se $S \subset \mathbf{P}^4$ è sottocanonica con $\omega_S \cong \mathcal{O}_S(e)$:
(i) $deg(P) \leq e + 3$;
(ii) se $\mathcal{R} = \emptyset$, allora S è intersezione completa.

Per completare la dimostrazione si usa il metodo della dimostrazione dei TEOREMI 1 e 2.
Si distinguono quindi vari casi, a seconda del comportamento del luogo base delle coniche q_H. In alcuni casi si dimostra che $d \leq 25$ e quindi si conclude con il LEMMA 4, in altri si dimostra che $r = 0$ e poi si usa il LEMMA 5. Infatti se la superficie S o il threefold T sono i.c., anche X lo è.

REFERENZE:
1) Ellia,-, "On smooth surfaces in $\mathbf{P}^4$ containing a plane curve", preprint;
2) -, "On a special class of smooth codimension two subvarieties in $\mathbf{P}^n$, $n \geq 5$", preprint.