

Grafici di Feynman: da artificio computazionale a rappresentazione della natura delle cose

GIOVANNI GALLAVOTTI

Accademia dei Lincei & INFN-Roma1, Italia

May 22, 2014

Abstract

L'applicazione del principio della minima azione indusse Lagrange a sviluppare le teorie perturbative in Meccanica Classica e, esteso da Feynman alla Meccanica Quantistica, portò alla rappresentazione mediante grafici delle “ampiezze” che controllano le interazioni fra particelle elementari. La teoria della rinormalizzazione fa uso della formula di Lagrange in forma grafica per mostrare che i valori dei grafici di Feynman non sono affetti da “divergenze sovrapposte”. Questo consente un uso piuttosto libero dei grafici di Feynman e ne fa trattare gli elementi (particelle reali e virtuali) come descrittivi enti reali e non già simboli metaforici.

Key words: *extended version of a talk at the conference “Metafore e simboli nella scienza”*, Roma, Accademia Nazionale dei Lincei, 8-9 May 2013.

1 Lagrange e Feynman

La Meccanica anzi la Fisica come scienza della Natura sono fondate sulle leggi di Newton nella formulazione del Principio della Minima azione secondo Lagrange. Tutti i tentativi di stabilire teorie di fenomeni, sia macroscopici che microscopici, fanno riferimento a una *Lagrangiana* dalla quale si derivano le equazioni che regolano il fenomeno che si vuol descrivere in termini quantitativi e *a priori*.

La impostazione Lagrangiana portò ad una riduzione dei problemi, che si cercava e ancora a volte si cerca di risolvere con artifici o principi *ad hoc*, a questioni puramente “geometriche” come diceva Lagrange o “analitiche” come si direbbe oggi.

Scrivere equazioni non significa risolverle e molto, anzi tutto, resta da fare: ma il problema è impostato e si deve affrontare senza ricorrere ad ulteriori aiuti, quali l'aggiunta di ulteriori principi pur "ragionevoli".

Con questa logica Lagrange ventitreenne entrò, da pari a Eulero, D'Alembert, D. Bernoulli, nel mondo della ricerca risolvendo il problema della teoria delle oscillazioni della corda vibrante. La sua critica individuò nel ricorso a ipotesi addizionali rispetto ai principi di Newton l'origine delle diversità di opinioni e propose di procedere aderendo strettamente ai principi (di Newton):

Il resulte de tout cet exposé que l'Analyse que nous avons proposée dans le Chapitre précédent est peut-être, la seule qui puisse jeter sur ces matières obscures une lumière suffisante à éclaircir les doutes qu'on forme de part et d'autre.

Lagrange passò all'impostazione di altri importanti problemi meccanici, trasformandoli in equazioni, in modo sistematico e senza ambiguità, attraverso la sua versione del *principio della minima azione*:

... Elle n'est autre chose que le principe de Dynamique de M. d'Alembert, réduit en formule au moyen du principe de l'équilibre appelé communément loi des vitesses virtuelles. Mais la combinaison de ces deux principes est un pas qui n'avait pas été fait, et c'est peut-être le seul degré de perfection qui, après la découverte de M. d'Alembert, manquait encore à la Théorie de la Dynamique., [1, V.,p11].¹

applicato alle più diverse questioni della Meccanica e Fluidodinamica

Ovviamente non solo scrive le equazioni e, con metodi spesso molto originali, ne risolve molte a volte esattamente (come nel caso del corpo rigido a simmetria cilindrica fissato in un punto dell'asse di simmetria) e a volte con approssimazioni (come nel caso di molte questioni di Meccanica Celeste) studiate con il metodo della teoria perturbativa ottenendo per la prima volta previsioni del moto dei corpi del sistema solare su scale di tempo secolari.

Uno strumento della teoria perturbativa di Lagrange è un notevole metodo di soluzione di un'equazione $\alpha = x - \varphi(x)$, [1, T.III, p.25]:

$$\alpha = x - \varphi(x), \quad \leftrightarrow \quad x = \alpha + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^{k-1}}{\partial \alpha^{k-1}} (\varphi(\alpha)^k) \quad (1.1)$$

in cui, ad esempio, posta $\alpha = 0$ la seconda relazione fornisce un'espressione per una soluzione formale di $x = \varphi(x)$.

¹i.e. $\sum_i (\mathbf{f}_i - m_i \mathbf{a}_i) \cdot \delta \mathbf{x}_i = 0$.

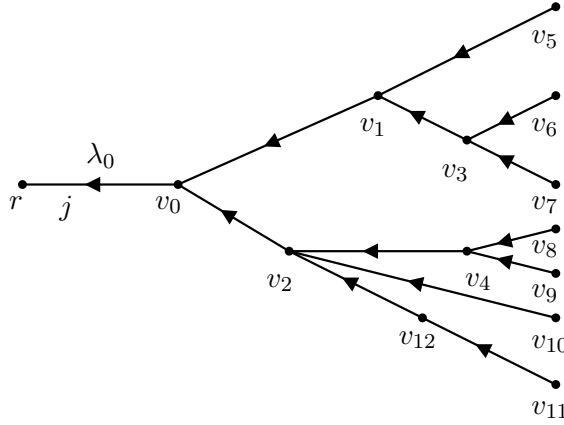
Nelle applicazioni questa formula è usata nelle teorie perturbative che sono applicate ai più svariati problemi e sono sempre accompagnate da calcoli algebrici assai complicati.

In versione moderna la estensione a x in R^n , $n \geq 1$ è usata via la sua rappresentazione equivalente detta *sviluppo in alberi* del k -mo termine in Eq.(1.1):

$$\frac{1}{k!} \partial_\alpha^{k-1} (\varphi(\alpha)^k) = \sum_\theta \text{Val}(\theta) \quad (1.2)$$

ove θ è un grafico ad albero, *i.e.* è un albero decorato con

- (1) k rami λ di uguale lunghezza orientati verso la “radice” r ,
- (2) ogni nodo come anche la radice (però non considerata un nodo) porta un indice $j_v \in \{1, \dots, n\}$
- (3) in ogni v entrano $k_v \geq 0$ rami $\lambda_1 \equiv vv_1, \dots, \lambda_{k_v} \equiv vv_{k_v}$ ove v_1, \dots, v_{k_v} sono i k_v nodi che precedono v (e si ha $\sum_{v < r} k_v = k$) e
- (4) il nodo v simbolizza il tensore $\partial_{x_{j_{v_1}}, x_{j_{v_2}}, \dots, x_{j_{v_{k_v}}}}^{k_v} \varphi_{j_v}(x)$



Un albero decorato. Gli indici $j_v, v < r$ non sono indicati e vanno intesi contratti a coppie.

- (5) Due tali alberi sono considerati equivalenti se sovrapponibili movendo “a cerniera” i rami che entrano nei nodi senza permettere loro sovrapposizioni.
- (6) Il *valore*, $\text{Val}(\theta)$ è definito da

$$\text{Val}(\theta) = \prod_{v \in \theta} \left(\frac{1}{k_v!} \partial_{j_{v_1}, \dots, j_{v_{k_v}}}^{k_v} \varphi_{j_v}(x) \right) \quad (1.3)$$

intendendo eseguita la somma sugli indici di nodo, *tranne l'indice associato alla radice* $j = j_r$.

Nel 1949 Feynman propone un'interpretazione della Meccanica quantistica fondata su una originale interpretazione del principio della minima azione, [2], che poi lo conduce a introdurre una interpretazione grafica dei calcoli perturbativi per le teorie relativistiche delle particelle elementari.

Le formule perturbative che si incontrano nella teoria dei campi sono complesse e fino agli anni '950 risultavano spesso in formule necessitanti di intere pagine per essere scritte: ad esempio il calcolo del momento magnetico anomalo dell'elettrone o le correzioni radiative alla collisione Compton tra elettrone e fotone.

Feynman introduce una diversa rappresentazione della stessa algebra: in un certo senso percorre a ritroso il cammino di Lagrange che cercò invece di eliminare le figure per fornire sempre formule algebriche per descrivere teorie e proprietà fisiche, come dalla prefazione alla *Mécanique Analytique*, [1, Tome XI,p.xii]:

On ne trouvera point de Figures dans cet Ouvrage. Les méthodes que j'y expose ne demandent ni constructions, ni raisonnements géométriques ou mécaniques, mais seulement des opérations algébriques, assujetties à une marche régulière et uniforme. Ceux qui aiment l'Analyse verront avec plaisir la Méchanique en devenir une nouvelle branche, et me sauront gré d'en avoir étendu ainsi le domaine.

La serie di Lagrange appare però nello studio delle serie della teoria dei campi quando si nota che tali serie paiono consistere di termini divergenti e quindi paiono prive di senso. Grazie alla rappresentazione grafica di Feynman diviene possibile una descrizione precisa e al tempo stesso concisa degli infiniti termini la cui somma fornisce le serie che esprimono i valori di quantità osservabili (quali sezioni d'urto, ad esempio). E la formula di Lagrange consente di mettere in luce l'esistenza di "risommazioni" ("regole di somma") che esibiscono cancellazioni che permettono di far vedere che le divergenze sono, in casi interessanti per la Fisica, in realtà solo apprenti.

Allo scopo è essenziale combinare i metodi grafici per la formula di Lagrange e i grafici di Feynman: diventa così "evidente" la indipendenza (o "assenza di divergenze sovrapposte") dei vari termini infiniti. La relazione fra la formula di Lagrange e i grafici di Feynman è stata osservata già in [3].

2 I grafici di Feynman

Nella rappresentazione grafica di Feynman le "ampiezze" (ossia le quantità che tecnicamente controllano proprietà osservabili, quali sezioni d'urto di

collisioni o vite medie dei decadimenti o momenti magnetici di particelle cariche ...) sono calcolabili da grafici costituiti a partire da linee che rappresentano particelle, orientate se rappresentano particelle cariche o non orientate se rappresentano particelle neutre. In un grafico queste linee possono convergere in nodi o “emergere” da essi, rimanendo eventualmente con un estremo libero. Ogni linea è decorata da indici che simboleggiano proprietà della particella rappresentata, quali il suo momento, lo spin, l’elicità, la carica elettrica, il sapore &c.

La rappresentazione grafica deve essere vista come un modo sintetico di fornire tutti i dettagli necessari alla costruzione di una formula ossia come un diverso modo per rappresentarla. È di enorme aiuto perché a un occhio esperto fornisce assai sinteticamente tutte le informazioni e al tempo stesso permette di eseguire complesse operazioni algebriche senza dover eseguire i calcoli formali.

Fu così possibile visualizzare il fenomeno delle cancellazioni ossia dell’esistenza di identità implicanti l’assenza di quantità infinite che si temeva che non fossero eliminabili in modo consistente e che quindi costituissero il segno di inadeguatezza concettuale di teorie quali l’elettrodinamica quantica, pur capaci di previsioni assai accurate.

Il successo di questo nuovo modo di rappresentare formule e la versatilità del suo uso per l’esecuzione rapida di complesse operazioni algebriche immediatamente implicò lo sviluppo di un modo di lettura dei grafici stessi:

... a physical point of view is available which permits them to be written down directly for any specific problem...

A complete, unambiguous, and presumably consistent, method is therefore available for the calculation of all processes involving electrons and photons, da Feynman [4].

Un esempio demplice è il calcolo dell’ampiezza che controlla la sezione d’urto per la collisione Compton, tra fotone ed elettrone: è rappresentata in prima approssimazione dalla coppia di grafici

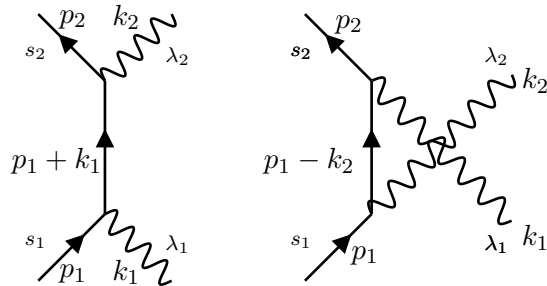


Fig1

che sono letti come

“un elettrone di momento p_1 e spin s_1 assorbe un fotone di momento k_1 e polarizzazione λ_1 generando un elettrone virtuale di momento $p_1 + k_1$ che poi emette un fotone di momento k_2 e polarizzazione λ_2 e un elettrone di impulso p_2 e spin s_2 ”, evento che si verifica simultaneamente a un elettrone di impulso p_1 e spin s_1 emette un fotone di impulso k_2 e polarizzazione λ_2 trasformandosi in un elettrone virtuale di momento $p_1 - k_2$ che poi assorbe un fotone di impulso k_1 e polarizzazione λ_1 trasformandosi in un elettrone di impulso p_2 e spin s_2 .

A uno studente che inizia lo studio della Fisica relativistica quantistica la descrizione appena data significa, se $p = (\mathbf{p}, p_0)$, $k = (\mathbf{k}, k_0)$ sono quadri-vettori

$$\begin{aligned} & \delta(p_2 + k_2 - p_1 - k_1) \frac{r_0}{2\pi i} \frac{m^2}{\sqrt{E(p_1)E(p_2)\omega(k_1)\omega(k_2)}} \\ & \cdot w^{s_2}(p_2) \left\{ \gamma \cdot \varepsilon^{\lambda_2}(k_2) \frac{\gamma \cdot (p_1 + k_1) + m}{(p_1 + k_1)^2 - m^2 + i\varepsilon} \gamma \cdot \varepsilon^{\lambda_1}(k_1) \right. \\ & \left. + \gamma \cdot \varepsilon^{\lambda_1}(k_1) \frac{\gamma \cdot (p_1 - k_2) + m}{(p_1 - k_2)^2 - m^2 + i\varepsilon} \gamma \cdot \varepsilon^{\lambda_2}(k_2) \right\} w^{s_1}(p_1) \end{aligned} \quad (2.1)$$

ove m è la massa dell'elettrone, $r_0 = \frac{e^2}{4\pi m c^2}$, $E(p) = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$, $\omega(k) = |\mathbf{k}|$, $\gamma = (\boldsymbol{\gamma}, \gamma_0)$ sono le matrici gamma, $i = \sqrt{-1}$ e $w^s(p)$, $\varepsilon^\lambda(k)$ sono rispettivamente i vettori di spin s e di polarizzazione λ ; la δ esprime la condizione di conservazione del momento e altre restrizioni dovute alla conservazione del momento angolare sono sottintese.

La rappresentazione di fig.1 e la formula di Eq.(2.1) hanno dunque lo stesso significato: il vantaggio della prima è solo che può essere letta evocando immagini di processi reali e senza simboli algebrici (è il su citato “physical point of view”). È un ritorno all’uso di immagini in argomenti volti a spiegare fenomeni naturali, opposto alla loro eliminazione e sostituzione con simboli algebrici proposta e perseguita da Lagrange.

A prima vista l’uso fig.1 in alternativa alla formula in Eq. (1.1) parrebbe una questione di preferenza personale. Ma il problema è che la Eq. (2.1) è solo la prima approssimazione “di ordine e^2 ” per il calcolo della sezione d’urto Compton e il suo confronto con i dati sperimentali.

I dati sono sensibili a correzioni di ordine e^4 e il calcolo di queste correzioni può essere descritto graficamente semplicemente sostituendo in Fig.1 una delle tre linee rappresentanti un elettrone o una delle due rappresenti il fotone con

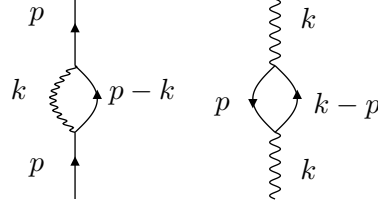


Fig.2

rispettivamente. Dal punto di vista analitico queste modifiche corrispondono a notevoli variazioni nelle formule; ad esempio inserendo la Fig.2 sulla linea di momento $p_1 + k_1$ genera il primo dei quattro grafici (fra i 13 possibili)

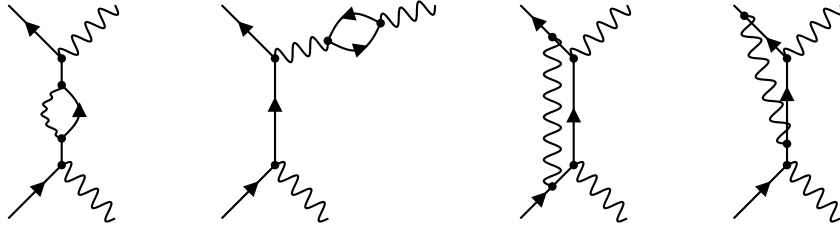


Fig.3

e introduce il termine in parentesi nella terza riga della formula seguente, da confrontare con la Eq.(2.1)

$$\begin{aligned}
 & \delta(p_2 + k_2 - p_1 - k_1) \left(\frac{r_0}{2\pi i}\right)^2 \frac{m^2}{\sqrt{E(p_1)E(p_2)\omega(k_1)\omega(k_2)}} \\
 & \cdot w^{s_2}(p_2) \left\{ \gamma \cdot \epsilon^{\lambda_2}(k_2) \frac{\gamma \cdot (p_1 + k_1) + m}{(p_1 + k_1)^2 - m^2 + i\varepsilon} \right. \\
 & \cdot \left(\int \frac{(\gamma \cdot (p_1 + k_1 - k) + m) dk}{k^2(p_1 + k_1 - k)^2 - m^2 + i\varepsilon} \right) \\
 & \cdot \left. \frac{\gamma \cdot (p_1 + k_1) + m}{(p_1 + k_1)^2 - m^2 + i\varepsilon} \gamma \cdot \epsilon^{\lambda_1}(k_1) \right.
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

che si legge

“un elettrone di momento p_1 e spin s_1 assorbe un fotone di momento k_1 e polarizzazione λ_1 generando un elettrone virtuale di momento $p_1 + k_1$ che poi decade in un fotone virtuale di momento k e un elettrone virtuale di impulso $p_1 + k_1 - k$ che collidono rigenerando l'elettrone virtuale di momento $p_1 + k_1$...”

Si potrebbe forse sostenere, a contemplare questa formula, che ancora non ci sia grande differenza fra la rappresentazione grafica e quella analitica. In fondo si può dire che oltre ai consueti simboli (lettere greche e latine, simboli di somma, differenza, prodotto, radici &c) gli elementi grafici rappresentanti elettroni (le linee) e fotoni (le onde):

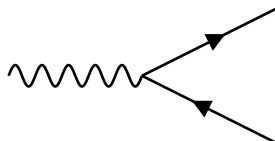


Fig.4

e le regole di loro combinazione per formare grafici più complessi e regole di lettura e di traduzione in usuali formule algebriche possono essere viste semplicemente come un arricchimento dei simboli dell'algebra per descrivere la teoria della elettrodinamica quantistica, o come sue rappresentazioni eleganti ma precise e dettagliatissime (sue *èkfrasi* piuttosto che sue *ipotiposi*).

Però a questo punto si deve notare che l'integrale nella Eq.(2.2) è *divergente*: e allora si osserva che questa divergenza può essere eliminata se si immagina che la massa osservabile m dell'elettrone non sia uguale alla m della Lagrangiana a fondamento della teoria, [5, p.275], ove invece dovrebbe apparire $m + \delta m$ invece che m : e il nuovo termine δm contribuirà aggiungendo ai grafici considerati altri grafici e in modo semplicemente rappresentabile. Ma questo non sarà sufficiente non solo perchè saranno necessarie correzioni di ordine superiore rappresentabili ancora con grafici analiticamente o topologicamente assai più complessi e anche perchè si trovano altri termini divergenti che richiedono ulteriori cambiamenti nella Lagrangiana.

Tuttavia nella loro rappresentazione grafica i vari termini delle serie perturbative resteranno leggibili interpretando i nodi come rappresentanti collisioni fra particelle reali o virtuali: e soprattutto sarà possibile far vedere, almeno nell'elettrodinamica e in altre teorie più semplici, *senza veramente entrare nei dettagli analitici*, che non si generano mai quantità infinite, ossia che la teoria è *rinormalizzabile*.

Questo nell'articolo originale di Feynman era "presumibile", [4, Abstract], e nel 1953 è così riassunto da Heitler

On the one hand we can state that the present theory cannot be final. We have found a number of divergent quantities, although all of them are unobservable in principle. These are ...

Furthermore, we found in some cases that even observable effects are described by ambiguous mathematical expressions...

The ambiguities can always be settled by applying a certain amount of 'wishful mathematics', namely by using additional conditions for the evaluation of such ambiguous integrals...

On the other hand, these difficulties do not prevent us from giving a theoretical answer to every legitimate question concerning observable effects. These answers are, whenever they can be tested, always in excellent agreement with the facts..., [6, p.354],

Il “presumibile” è poi divenuto “dimostrato” grazie alla combinazione della rappresentazione grafica di Feynman e la rappresentazione grafica della formula di Lagrange, [7].

L’impiego della versione grafica della formula di Lagrange non è immediato ed è implicito in [7], ma ha permesso di risolvere il problema “delle divergenze sovrapposte” (mostrando che non sono possibili) che facevano dire a Dyson:

Finally, it must be said that the proof of the finiteness and unambiguity of $U(\infty)$ given in this paper makes no pretence of being complete and rigorous. It is most desirable that these general arguments should as soon as possible be supplemented by an explicit calculation of at least one fourth-order radiative effect, to make sure that no unforeseen difficulties arise in that order, [8, p.1754].

ottenendo la riformulazione della teoria perturbativa. È un impiego divenuto più esplicito in seguito allo sviluppo della teoria del Gruppo di rinormalizzazione di Wilson, [9], che introduce il nuovo e fondamentale concetto delle *costanti correnti* e della *libertà asintotica*; le costanti correnti sono viste come soluzione di un problema di funzioni implicite che viene trattato a mezzo della formula di Lagrange (o meglio di una sua estensione a dimensione infinita); per una rassegna basata sulle teorie scalari si veda [10, 11].

3 Commenti

La leggibilità dei grafici, esprime in modo sintetico formule analiticamente complesse, come descrizione di processi elementari di collisione (“interazione”), ha fatto sì che siano stati adottati universalmente nella teoria dei campi e in teorie ad essa formalmente simili (quali la Fisica delle basse temperature con le oscillazioni dei cristalli, i fenomeni della superconduttività e superfluidità o la teoria del punto critico o anche, in Meccanica Classica, la teoria delle piccole oscillazioni, dei moti caotici e delle risonanze nella Meccanica Celeste).

E spesso nelle applicazioni in luogo delle formule analitiche si usa solo presentare i grafici corrispondenti senza realmente sottinterderne il significato algebrico (sono allra *metafore*). Ma così, di fatto, gli elementi grafici assumono una realtà che va oltre il significato puramente semantico di nuovi simboli algebrici. Le particelle virtuali vengono pensate come reali e dotate di strane proprietà (ad esempio un elettrone virtuale ha un momento p il cui quadrato non è il quadrato della massa o un fotone virtuale non ha

massa nulla) che una volta comprese ne consentono l'impiego alla pari delle particelle reali alla base della teoria.

In definitiva diventa naturale porsi la questione della realtà degli enti che costituiscono i grafici delle teorie fisiche moderne: sono meri artifici, utili ma pur sempre artifici o la loro utilità e costante impiego nella Scienza ne testimonia la realtà? Nelle esposizioni sulla teoria dei campi, o teoria degli stati condensati, o fisica delle basse temperature la descrizione dei risultati è quasi sempre presentata a mezzo di grafici di Feynman in cui i simboli vengono descritti verbalmente e trattati come rappresentanti enti reali.

E allora la questione della esistenza delle particelle virtuali, delle quasi particelle e altre entità che furono introdotte come simboli utili ma astratti e avulsi dalla realtà, perde senso e i processi che sono illustrati dai grafici non sono, di fatto, più metafore:

... *victus fateare necesse est*
esse ea..., [12, I, 624-625].

References

- [1] J.L. Lagrange. *Oeuvres*. Gauthiers-Villars, Paris, 1867-1892.
- [2] R.P. Feynman and A.R. Hibbs. *Quantum Mechanics and Path Integrals*. Dover, Mineola, New York, 2010 (Emended edition by D. Styer).
- [3] A. Abdesselam. The jacobian conjecture as a problem of perturbative quantum field theory. *Annals Henri Poincaré*, 4:199–215, 2003.
- [4] R.P. Feynman. Space-Time Approach to Quantum Electrodynamics. *Physical Review*, 76:769–789, 1949.
- [5] S. Schweber. *An Introduction to relativistic quantum field theory*. Row, Peterson & C, Evanston, IL, 1961.
- [6] W. Heitler. *The Quantum Theory of Radiation, (III edition)*. Dover, Mineola, New York, 1984.
- [7] K. Hepp. *Théorie de la renormalization*, volume 2. Springer Verlag, Lecture notes in Physics, 1969.
- [8] F. Dyson. The S -matrix in quantum electrodynamics. *The Smatrix in quantum electrodynamics, Physical Review*, 75:1736–1755, 1949.
- [9] K. Wilson. Renormalization group and strong interactions. *Physical Review D*, 3:1818–1846, 1971.
- [10] G. Gallavotti. Renormalization theory and ultraviolet stability for scalar fields via renormalization group methods. *Reviews of Modern Physics*, 57:471–562, 1985.

- [11] G. Gallavotti. Aspects of Lagrange's Mechanics and their Legacy. *European Physical Journal H*, 38:595–615, 2013.
- [12] T. Lucretius. *De Rerum Natura*. Rizzoli, Milano, 1976.

`http://ipparco.roma1.infn.it`
`giovanni.gallavotti@roma1.infn.it`