Esercitazione 10

Geometria e Algebra Lineare GE110 - AA 2022–2023

15 Maggio 2023

Esercizio 1. Per ognuna delle seguenti applicazioni, si determini se sono applicazioni lineari. In caso affermativo si calcoli il nucleo e si discuta se l'applicazione é iniettiva, suriettiva e/o un isomorfismo.

1. $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da
$$f_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ y - 2z \end{pmatrix}.$$

2. $f_2 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita da
$$f_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ y - z \\ z - w \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. $f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da
$$f_3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + z \\ y + z \\ x + y + 2z \end{pmatrix}.$$

4. $f_4 : \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ definita da $f_4(p(x)) = p(x) - p(0)$.

Esercizio 2. Siano dati i seguenti vettori:
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

1. Esiste un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(v_1) = w_1$, $f(v_2) = w_2$ e $f(v_3) = f(w_3)$?
2. Esiste un'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(v_1) = w_1$ e $g(v_2) = w_2$?

Esercizio 3. Per ognuna delle seguenti terne di spazi vettoriali, funzioni e basi si calcoli la matrice $M_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}(f)$ associata alla funzione rispetto alle basi date:

1.
$$f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \qquad f_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ x - y \\ y \end{pmatrix} \qquad \mathcal{B}_1 = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \} \qquad \mathcal{B}_2 = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \}$$

2.

$$f_2 : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 \qquad f_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iy \\ -x \end{pmatrix} \qquad \mathcal{B}_1 = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \} \qquad \mathcal{B}_2 = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \}$$

3.

$$f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad f_3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ x+y+z \end{pmatrix} \quad \mathcal{B}_1 = \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \} \quad \mathcal{B}_2 = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}$$

Esercizio 4. Per ognuna delle seguenti applicazioni lineari si calcolino la matrice associata rispetto alle basi canoniche, il nucleo, l'immagine, la dimensione del nucleo, il rango, e si discuta se l'applicazione é iniettiva e/o suriettiva e/o un isomorfismo.

1. $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ data da

$$f_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ 2x-5y \\ 7y \end{pmatrix}$$

2. $f_2 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ data da

$$f_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+x_2+x_3+x_4 \\ x_2-x_4 \\ x_1+3x_3+6x_4 \end{pmatrix}$$

3. $g_1 : \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ data da $g_1(p(x)) = p'(x)$.

Esercizio 5. (*) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare definita da

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ 4x-4y \end{pmatrix}$$

e si consideri l'applicazione lineare

$$\Phi : \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \qquad \Phi(g) = f \circ g.$$

(a) Dimostrare che Φ é un applicazione lineare.

(b) Determinare una base $\mathcal{A}$ di $\ker \Phi$.

(c) Completare $\mathcal{A}$ a una base di $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.