Esercitazione 2

Geometria e Algebra Lineare GE110 - AA 2022–2023
Esercitatore: Amos Turchet

6, 8 Marzo 2023

Esercizio 1. Usando l'algoritmo di Gauss-Jordan, risolvere i seguenti sistemi lineari omogenei:

$$(i)\begin{cases} x_1 + + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$(ii)\begin{cases} -x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ -2x_1 - 4x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Esercizio 2. Usando l'esercizio precedente si trovi l'equazione del piano $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$ che contiene i punti $(1,1,1), (0,1,3)$ e $(-1,-2,2)$.

Esercizio 3. Esprimere le seguenti matrici come prodotto di matrici elementari:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 4. Sia A una matrica $n \times m$ e siano $R_{i,j}, R_i(\lambda), R_{i,j}(\lambda)$ le tre classi di matrici elementari di ordine n.

1. Dimostrare che $R_{i,j} \cdot A$ è la matrice ottenuta da A scambiando le righe i e j;
2. Dimostrare che $R_i(\lambda) \cdot A$ è la matrice ottenuta da A moltiplicando la i-esima riga per λ;
3. Dimostrare che $R_{i,j}(\lambda) \cdot A$ è la matrice ottenuta sommando all'i-esima riga di A, la j-esima riga moltiplicata per λ.

Esercizio 5. Sia $k \in \mathbb{R}$ e si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & k & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Usando le operazioni elementari si determini per quali valori di k la matrice A è invertibile;
2. Per tali valori di k si determini la matrice inversa A^{-1}.

Esercizio 6. Sia K un campo e sia $K[X]$ l'insieme di tutti i polinomi a coefficienti in K.

1. Si dimostri che $(K[X], +, \cdot)$, con le usuali operazioni di somma di polinomi e di moltiplicazione per scalare, è uno spazio vettoriale su K;
2. Sia $n \geq 1$ un intero positivo e sia $K[X]_{\leq n}$ l'insieme dei polinomi di grado *al più* n. L'insieme $(K[X], +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale (dove le operazioni sono le stesse del punto precedente)?

Esercizio 7. Sia $V = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Per le seguenti coppie di operazioni si determini quali rendono $(V, \oplus, *)$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$:

(a) $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$, $t * (a, b) = (ta, b)$;

(b) $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b - d)$, $t * (a, b) = (ta, tb)$;

(c) $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$, $t * (a, b) = (ta, 0)$;

(d) $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$, $t * (a, b) = (2ta, 2tb)$.