Esercitazione 2

Geometria e Algebra Lineare GE110 - AA 2022–2023
Esercitatore: Amos Turchet

13, 15 Marzo 2023

Esercizio 1. Discutere quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ sono sottospazi vettoriali:

1. $\{(x, 0, 0) : x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$;
2. $\{(x, y, z) : x - 2y + z = 1\}$;
3. $\{(t, t, t) : 0 \leq t \leq 1\}$;
4. $\{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 = 0\}$.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{K}[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{K}$. Discutere quali dei seguenti sottoinsiemi sono sottospazi:

1. $U = \{p(x) \in \mathbb{K}[x] : p(0) = 1\}$;
2. $U = \{p(x) \in \mathbb{K}[x] : p(1) = 0\}$;
3. $U = \{p(x) \in \mathbb{K}[x] : p(0) = p(1) = 0\}$;
4. $U = \{p(x) \in \mathbb{K}[x] : p(0)p(1) = 0\}$.

Esercizio 3. Siano V_1, V_2 due spazi vettoriali su $\mathbb{R}$. Sull'insieme $V_1 \times V_2$ si considerino le seguenti operazioni

- $(v_1, v_2) \oplus (w_1, w_2) := (v_1 + w_1, v_2 + w_2)$ per ogni $v_1, w_1 \in V_1$ e $v_2, w_2 \in V_2$ (dove $+$ indica la corrispondente somma negli spazi vettoriali V_1 e V_2);
- $\lambda \odot (v_1, v_2) := (\lambda \cdot v_1, \lambda \cdot v_2)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, $v_1 \in V_1$ e $v_2 \in V_2$ (e $\cdot$ indica la corrispondente moltiplicazione per scalare negli spazi vettoriali V_1 e V_2).

Dimostrare che $(V_1 \times V_2, \oplus, \odot)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

Esercizio 4. Stabilire quali dei seguenti insiemi di vettori sono lineramente indipendenti, quali sono un sistema di generatori e quali costituiscono una base.

1. in $\mathbb{R}^2$

$$(a) = \{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\} \qquad (b) = \{\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\} \qquad (c) = \{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\}.$$

2. in $\mathbb{R}^3$

$$(a) = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \} \qquad (b) = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \}$$

Esercizio 5. Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $M_{n,n}(\mathbb{K})$:

$$\mathcal{S} := \{A \in M_{n.n}(\mathbb{K}) : A \text{ é simmetrica } \}$$
$$\mathcal{A} := \{A \in M_{n.n}(\mathbb{K}) : A \text{ é antisimmetrica } \}.$$

- Si dimostri che $\mathcal{S}$ e $\mathcal{A}$ sono sottospazi vettoriali di $M_{n,n}(\mathbb{K})$;
- Si dimostri che $\mathcal{S} + \mathcal{A} = M_{n,n}(\mathbb{K})$;
- Si discuta se $\mathcal{S} \oplus \mathcal{A} = M_{n,n}(\mathbb{K})$.

Esercizio 6. Sia $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ un sistema lineare a coefficienti in $\mathbb{R}$, con $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{\mathbf{m}}$, e sia $S \subset \mathbb{R}^n$ l'insieme delle sue soluzioni. Si dimostri che S é un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ se e soltanto se $\mathbf{b} = \mathbf{0}$.