Esercitazione 7

Geometria e Algebra Lineare GE110 - AA 2022–2023

12 Aprile 2023 - Preparazione al Primo Esonero

Esercizio 1. Per $h, k \in \mathbb{R}$ si consideri il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} 2X_1 + k\,X_2 + X_3 - X_4 = k \\ X_1 + 2X_2 + 2X_3 + X_4 = 1 \\ X_1 + X_2 + 2X_3 + X_4 = k \\ 2X_1 + k\,X_2 + X_3 + k\,X_4 = 1 \end{cases}$$

Si determinino i valori di h e k per i quali il sistema è compatibile e, in tal caso, si determini esplicitamente l'insieme delle soluzioni.
Come preparazione all'esonero si consiglia di risolvere l'esercizio usando operazioni elementari.

Esercizio 2. Sia $a \in \mathbb{R}$ e si consideri la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ a & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Si determinino i valori di a per cui la matrica A è invertibile, e per tali valori si calcoli la matrice inversa A^{-1};

(b) Si consideri la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a & 2 & 1 \\ 1 & a & 2 \end{pmatrix}.$$

Determinare i valori di a per cui esiste una matrice $M \in \mathcal{M}_3$ tale che $AM = B$ (senza ridurre il problema a un sistema lineare negli elementi di M).

Esercizio 3. Sia $k \in \mathbb{R}$ e si considerino i sottospazi U_k e W_k di $\mathbb{R}^5$ definiti da

$$U_k = \begin{cases} X_1 + 2X_2 + X_3 = 0 \\ X_1 + 3X_2 + (k+1)X_3 + k\,X_4 + X_5 = 0 \\ 2X_1 + 5X_2 + 2X_3 + (1-k)X_5 = 0 \end{cases}$$

$$W_k = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ k \end{pmatrix} \rangle.$$

1. Determinare le dimensioni e calcolare due basi dei sottospazi U_k e W_k.
2. Determinare le dimensioni di $U_k + W_k$ e $U_k \cap W_k$.
3. Determinare tutti i valori di k per i quali $U_k \oplus W_k = \mathbb{R}^5$.
4. Determinare per quali valori di k esiste una base $\mathcal{B}_{U_k}$ di U_k e una base $\mathcal{B}_{W_k}$ di W_k tali che $\mathcal{B}_{U_k} \cap \mathcal{B}_{W_k} \neq \varnothing$.