Geometria **<u>Prova di Autovalutazione</u>** Gennaio 2024

Nome (Cognome, Nome)

Matricola #

- Non aprire l'esame fino a quando non è stato espressamente consentito. Il tempo totale per l'esame è 150 minuti.
- Questo esame contiene 6 problemi in 11 pagine.
- Non sono ammessi appunti di nessun genere, calcolatrici, smartphones nè smart watches.
- <u>Giustificate il vostro lavoro!</u> Tranne che per le domande Vero/Falso, se una risposta (anche corretta) non ha spiegazioni non si riceveranno tutti i i punti per il problema.

Non scrivere in questa tabella!

Problema	Punti	Risultato
1	10	
2	10	
3	20	
4	20	
5	20	
6	20	
Totale:	100	

Problema 1. (10 points) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false (non si richiede alcuna giustificazione per questa parte).

(a) Se $\mathcal{B}$ è una base di un sottospazio S e $u \in \mathcal{B}$ allora $2 \cdot u \in \mathcal{B}$.

◯ Vero ◯ Falso

(b) Se una matrice $n \times n$ A è diagonalizzabile allora A è invertibile.

◯ Vero ◯ Falso

(c) Se A è una matrice stocastica per colonne allora $\lambda = 1$ è il più piccolo autovalore di A.

◯ Vero ◯ Falso

(d) In un sottospazio di dimension n ci sono al più n vettori linearmente indipendenti.

◯ Vero ◯ Falso

(e) Se u e v sono due autovettori di una matrice A allora u e v sono linearmente indipendenti.

◯ Vero ◯ Falso

(f) Lo spazio vettoriale delle funzioni continue $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ha dimensione finita.

◯ Vero ◯ Falso

(g) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare è un sottospazio vettoriale.

◯ Vero ◯ Falso

(h) Se A è una matrice $p \times n$ allora $\text{rango}(A) \leq \min\{p, n\}$.

◯ Vero ◯ Falso

(i) Se una matrice è diagonalizzabile, tutti i suoi autovalori sono distinti.

◯ Vero ◯ Falso

(j) Se v e w sono autovettori di una matrice A con lo *stesso* autovalore λ allora $v - w$ è un autovettore di A.

◯ Vero ◯ Falso

Problema 2. (10 points) Per ognuna delle seguenti domande si dia un esempio esplicito con una breve spiegazione. Se non è possibile dare un esempio si spieghi perchè .

(a) Una matrice 3×3 con tutti i termini non nulli con determinante uguale a 0.

(b) Una matrice 2×2 che ha $e_1 + e_2$ come autovettore.

(c) Due trasformazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tali che $f \circ g$ sia l'identità .

(d) Tre vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{R}^2$ tali che l'equazione $x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + x_3\vec{v}_3 = \vec{b}$ ha al più una soluzione per ogni $\vec{b} \in \mathbb{R}^2$

(e) Una base ortogonale del sottospazio $\{x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$ di $\mathbb{R}^3$.

(f) Una trasformazione lineare $f : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ che sia suriettiva.

Problema 3. (20 points) Si consideri il seguente sistema lineare dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$:

$$S_k : \begin{cases} x_1 \qquad - k\,x_3 + 2x_4 = \quad 4 \\ 2x_1 - x_2 + k\,x_3 + 3x_4 = \quad 5 \\ x_1 - x_2 \qquad + \ x_4 = 2k - 1 \end{cases}$$

(a) Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il sistema è compatibile.

(b) Sia W_k l'insieme delle soluzioni del sistema *omogeneo* associato a S_k. Stabilire per quali valori di k il sottospazio W_k ha dimensione 2, e per uno di tali valori, calcolare una base per W_k.

(c) Sia $U = \operatorname{span}\{\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -k \\ -k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$. Per il valore di k scelto nel punto precedente si calcoli una base e la dimensione di $U + W_k$.

(d) Per lo stesso valore di k usato nei punti precedenti si determini la dimensione di $U \cap W_k$.

Problema 4. (20 points) Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la trasformazione lineare definita da

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ x_2 \\ 2x_2 + x_3 - 2x_4 \\ 2x_2 - x_4 \end{pmatrix}$$

(a) Calcolare il polinomio caratteristico $p_A(t)$ con A la matrice associata ad f rispetto ad una base di $\mathbb{R}^4$. Si calcolino poi gli autovalori di f, le loro molteplicità algebriche e si discuta se f è o meno invertibile.

(b) Determinare una base di ciascun autospazio di f e la molteplicità geometrica di ogni autovalore.

(c) Si discuta se f è diagonalizzabile. In caso positivo si trovino un matrice invertibile P e una matrice diagonale D tali che $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$.

Problema 5. (20 points) Siano A e T_B le seguenti matrice e trasformazioni lineari (dove $a \in \mathbb{R}$):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a & 3 \\ 1 & 1 & 1 & a+1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad T_B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

(a) Si determini dominio e codominio di T_A e T_B e la matrice associata alla trasformazione T_B rispetto alle basi canoniche.

(b) Per ogni composizione che ha senso tra $T_A \circ T_B$ e $T_B \circ T_A$ si determini dominio, codominio, la matrice associata e i valori di a tali che la composizione (se ha senso) ha rango 2.

(c) Per ognuna delle composizioni che hanno senso del punto precedente, si calcolino una base e le equazioni cartesiane del nucleo e dell'immagine per i valori di a trovati prima.

Problema 6. (20 points) Sia $f : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ una trasformazione lineare tale che

- il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} f$ e il vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ *NON* è nell'immagine;
- i polinomi $p_1 = x + 3x^3$ e $p_2 = -1 + x$ soddisfano $f(p_1) = f(p_2) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Si determini il rango di f e una base dell'immagine $\operatorname{Im}(f)$ giustificando il ragionamento.

(b) Si calcoli la nullità di f e si determini una soluzione non nulla di $f(p) = \underline{0}$.

(c) Si trovi un polinomio q distinto da p_1 e p_2 tale che $f(q) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(d) [4 points] Si completi la base di $\mathrm{Im}(f)$ a una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ e si calcoli la matrice del cambiamento di base $M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\mathrm{id})$.