Foglio 1 di Esercizi

Geometria - AA 2023–2024
Ingegneria Elettronica

8 ottobre 2023

Esercizio 1. Risolvere i seguenti sistemi lineari in due incognite $\{X, Y\}$ e verificare che i risultati ottenuti soddisfano il Teorema di Rouché–Capelli.

1. $\begin{cases} X - Y = -1 \\ -X + 2Y = 2 \end{cases}$;
2. $\begin{cases} X - Y = 1 \\ -X + Y = 1 \end{cases}$;
3. $\begin{cases} X - Y = 0 \\ -X + Y = 1 \end{cases}$.

Esercizio 2. Per ciascuno dei seguenti sistemi lineari in tre incognite $\{X, Y, Z\}$, scrivere la matrice completa associata, e dopo aver trovato una sua riduzione a gradini, stabilire se il sistema è compatibile e, in quel caso, esibire tutte le soluzioni. Verificare inoltre che i risultati ottenuti soddisfano il Teorema di Rouché–Capelli.

1. $\begin{cases} X - Y = -1 \\ -X + 2Y = 2 \end{cases}$;
2. $\begin{cases} X - Y = 1 \\ -X + Y = 1 \end{cases}$;
3. $\begin{cases} X - Y = 0 \\ -X + Y = 1 \end{cases}$;
4. $\begin{cases} X - Y = 2 \\ X + Z = 3 \end{cases}$;
5. $\begin{cases} X - 2Y - Z = 2 \\ X + Y - Z = 3 \end{cases}$;
6. $\begin{cases} X - Y + 2Z = 0 \\ -X + Y - 2Z = 1 \end{cases}$;
7. $\begin{cases} X - Y + Z = 0 \\ -X + 2Y = 1 \\ X - Y + 2Z = 0 \end{cases}$;
8. $\begin{cases} X - Y + Z = -1 \\ 2X - Y + 3Z = -2 \\ X - Y + Z = 0 \end{cases}$.

Esercizio 3. Per ognuna delle seguenti opzioni, dare un esempio di un sistema lineare in *due equazioni* e *due incognite* che abbia la proprietà descritta. In ciascun esempio disegnare le rette corrispondenti alle equazioni del sistema.

(a) Un sistema incompatibile;

(b) Un sistema con esattamente una soluzione;

(c) Un sistema con infinite soluzioni;

Per ognuno dei seguenti punti giustificare brevemente la risposta:

(i) È possibile aggiungere e/o togliere equazioni nell'esempio di (b) per rendere il sistema incompatibile?

(ii) È possibile aggiungere e/o togliere equazioni nell'esempio di (b) per ottenere un sistema con infinite soluzioni?

(iii) È possibile aggiungere e/o togliere equazioni nell'esempio di (b) per ottenere un sistema con lo stesso insieme di soluzioni?

(iv) È possibile aggiungere e/o togliere equazioni nell'esempio di (b) per ottenere un sistema con un'unica soluzione diversa da quella originale?

Esercizio 4. Supponiamo di voler rappresentare $(2,3)$ in $\mathbb{R}^2$ come l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare.

(a) Qual è il numero minimo di equazioni che tale sistema deve possedere? Scrivere un tale sistema;

(b) Possiamo aggiungere una o più equazioni al sistema del punto precedente in modo che il nuovo sistema abbia lo stesso insieme di soluzioni?

(c) Qual è il numero massimo di equazioni distinte che possono essere aggiunte al sistema del punto (a) mantenendo come unica soluzione $\{(2,3)\}$?

(d) Esiste una forma generale delle equazioni del punto (c)?

Esercizio 5. Sia $Sol(\Sigma)$ l'insieme delle soluzioni del seguente sistema lineare

$$\Sigma : \begin{cases} X + 3Y + Z = 4 \\ X + Y + Z = 6 \end{cases}$$

1. Dire per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ il vettore $(3,\ k,\ 4)$ appartiene a $Sol(\Sigma)$;
2. Dire per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ il vettore $(7-h,\ -1,\ h)$ appartiene a $Sol(\Sigma)$;
3. Trovare $Sol(\Sigma)$ con l'algoritmo di Gauss-Jordan.

Esercizio 6. Per ciascuna delle seguenti matrici, trovare la sua forma normale a gradini per riga.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$