Foglio 2 di Esercizi

Geometria - AA 2023–2024
Ingegneria Elettronica

22 ottobre 2023

Esercizio 1. Trovare una matrice A, 3×4, in forma ridotta a gradini, tale che il sistema lineare associato ad $(A \mid \vec{b}\,)$ con $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ abbia le seguenti proprietà :

- x_3 sia una variabile libera;
- l'insieme di soluzioni sia $\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R}\}$.

Esercizio 2. Per ciascuna delle seguenti matrici si calcoli il rango.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$;
2. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$;
3. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;
4. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;
5. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$;
6. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$;

Esercizio 3. Trovare tutti i valori di z_1 e z_2 in $\mathbb{R}$ tali che $\mathrm{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} = \mathbb{R}^3$ dove:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4. Per ciascuno dei seguenti sistemi lineari si trovi i generatori dell'insieme di soluzioni, si discuta se essi siano o meno linearmente indipendenti, e si calcoli la loro dimensione.

1. $\begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 + 2X_4 = 0 \end{cases}$;

2. $\begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 + 2X_4 = 0 \\ X_1 - X_2 - X_4 = 0 \end{cases}$;

3. $\begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 + 2X_4 = 0 \\ X_1 - X_2 - X_4 = 0 \\ -X_1 + X_2 - X_3 = 0 \end{cases}$;

4. $\begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 + 2X_4 = 0 \\ 2X_1 + 2X_2 - 2X_3 + 4X_4 = 0 \end{cases}$;

5. $\begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 + 2X_4 = 0 \\ X_1 - X_2 - X_4 = 0 \\ -X_1 + X_2 - X_3 = 0 \\ X_2 - 3X_4 = 0 \end{cases}$;

6. $\begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 + 2X_4 = 0 \\ X_1 - X_2 - X_4 = 0 \\ -X_1 + X_2 - X_3 = 0 \\ X_1 + X_2 - 2X_3 + X_4 = 0 \end{cases}$.

Esercizio 5. Per ciascuno dei seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$ si trovino le equazioni cartesiane.

1. $\text{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$;

2. $\text{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$;

3. $\text{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$;

4. $\text{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$;

5. $\text{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}\}$;

6. $\text{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$.

Esercizio 6. Siano dati i seguenti tre vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} t \\ -3 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

(a) Trovare tutti i valori di $t \in \mathbb{R}$ tali che l'equazione vettoriale

$$\vec{a}_1 x_1 + \vec{a} x_2 + \vec{a} x_3 = \vec{b}$$

abia un'*unica* soluzione per ogni $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ (si argomenti la risposta).

(b) I vettori $\vec{a}_1$ e $\vec{a}_2$ sono linearmente indipendenti? Perchè ?

(c) Si consideri il vettore $\vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$. Senza fare ulteriori calcoli, si trovi tutti i valori di t per cui esiste un'unica soluzione all'equazione vettoriale

$$\vec{a}_1 x_1 + \vec{a} x_2 + \vec{a} x_3 + \vec{a}_4 x_4 = \vec{c}$$

per ogni vettore $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$ (si argomenti la risposta).

Esercizio 7. Per ognuna delle seguenti situazione, *dare un esempio* (quando è possibile) o *spiegare perchè non è possibile.*

(a) Un insieme di vettori che non genera $\mathbb{R}^3$. Aggiungendo un ulteriore vettore, il nuovo insieme non genera $\mathbb{R}^3$;

(b) Un insieme di vettori linearmenti indipendenti in $\mathbb{R}^3$. Aggiungendo un ulteriore vettore il nuovo insieme è linearmente dipendente;

(c) Un insieme di vettori in $\mathbb{R}^3$ con le seguenti proprietà (4 possibilità):

generano $\mathbb{R}^3$, lin. indipendenti	generano $\mathbb{R}^3$, lin. dipendenti
non generano $\mathbb{R}^3$, lin. indipendenti	non generano $\mathbb{R}^3$, lin. dipendenti

Per ogni caso che è *possibile*, quanti vettori può contenere l'insieme (elencare tutte le restrizioni, nel senso di *al più* ... o *almeno* ...);

(d) Un sistema di equazioni con un'unica soluzione. Dopo aver aggiunto un'equazione il sistema ha infinite soluzioni.

(e) Un sistema di equazioni senza soluzioni. Dopo aver cancellato un'equazione il sistema ha infite soluzioni.

Esercizio 8. Siano dati i seguenti polinomi nello spazio vettoriale $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ dei polinomi di grado al più tre:

$$p_1(x) = 1 + x \qquad p_2(x) = 1 + x^2 \qquad p_3(x) = 1 + x^3 \qquad p_4(x) = 1 - x + x^2 + x^3.$$

1. Discutere se i polinomi p_1, p_2, p_3 e p_4 sono linearmente indipendenti; in caso negativo si esprima uno dei polinomi come combinazione lineare degli altri.
2. Discutere se $\operatorname{span}\{p_1, p_2, p_3, p_4\} = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.