Foglio 3 di Esercizi

Geometria - AA 2023–2024
Ingegneria Elettronica

5 novembre 2023

Esercizio 1. Per ciascuna delle seguenti coppie di sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$ si calcoli

- una base di U_i, la sua dimensione, e le sue equazioni cartesiane;
- una base di W_i e la sua dimensione;
- una base di $U_i + W_i$ e le sue equazioni cartesiane;
- la dimensione di $U_i \cap W_i$ utilizzando la formula di Grassmann, e ne si trovi una base.

1. $U_1 = \text{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\}$; $\quad W_1 = \begin{cases} X_1 - X_2 + X_3 = 0 \\ X_1 + X_4 = 0 \\ -X_2 + X_3 - X_4 = 0 \\ 2X_1 - X_2 + X_3 + X_4 = 0 \end{cases}$;

2. $U_2 = \text{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$; $\quad W_2 = \begin{cases} X_1 - X_2 + X_3 = 0 \\ X_1 + X_4 = 0 \\ -X_2 + X_3 - X_4 = 0 \\ 2X_1 - X_2 + X_3 + X_4 = 0 \end{cases}$;

3. $U_3 = \text{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\}$; $\quad W_3 = \begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 = 0 \\ X_3 - X_4 = 0 \\ X_2 + X_3 = 0 \\ X_1 + X_3 - X_4 = 0 \end{cases}$;

Esercizio 2. Per ciascuno dei seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$ si calcoli una base e la loro dimensione. Si estenda poi tale base a una base di $\mathbb{R}^4$.

1. $\text{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$;

2. $\text{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$;

3. $\text{span}\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}\}$;

5. $\text{span}\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\2\end{pmatrix}\}$;

4. $\text{span}\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\-2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-2\\1\\0\end{pmatrix}\}$;

6. $\text{span}\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\-2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-2\\1\\0\end{pmatrix}\}$;

Esercizio 3. Per ognuna delle seguenti applicazioni lineari si determini

- Dominio, Codominio e la matrice associata;
- Base, dimensione, e equazioni cartesiane dell'immagine;
- Base e dimensione del nucleo;
- Discutere se la trasformazione è iniettiva e/o suriettiva e/o biiettiva.

1. $f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1-x_2\\-2x_1+2x_2\end{pmatrix}$;

2. $f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1-x_2\\-2x_1+2x_2\\-x_1+x_2\end{pmatrix}$;

3. $f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1-x_2+2x_3\\-2x_1+2x_2-4x_3\end{pmatrix}$;

4. $f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1-x_2+2x_3\\x_1+x_2-x_3\\2x_1+x_3\end{pmatrix}$;

5. $f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1-x_2+2x_3-x_4\\x_1+x_2-x_3-x_4\\2x_1+x_3-2x_4\end{pmatrix}$;

6. $f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1-x_2+2x_3-x_4\\x_1+x_2-x_3-x_4\\2x_1+x_3-2x_4\\x_1+x_2-x_3-x_4\end{pmatrix}$;

Esercizio 4. Per ognuno dei seguenti insiemi W di polinomi nello spazio vettoriale $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ dei polinomi di grado al più quattro si calcoli una base di W e la sua dimensione.

1. $W = \text{span}\{1, (x-5)^2, (x-5)^3\}$;
2. $W = \text{span}\{1, x+1, x-1, x^2\}$;
3. $W = \text{span}\{x^2, x^2+1, x^2-1, x^3, x^4\}$;
4. $W = \{p \in \mathcal{P}_4(\mathbb{R}) : p(3) = 0\}$;
5. $W = \{p \in \mathcal{P}_4(\mathbb{R}) : p(2) = p(5) = 0\}$;
6. $W = \{p \in \mathcal{P}_4(\mathbb{R}) : p'(5) = 0\}$.

Esercizio 5. Sia A il quadrato "unitario" nel piano $\mathbb{R}^2$, ovvero il quadrato con vertici $(0,0), (1,0), (1,1)$ e $(0,1)$.

(a) Trovare una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $T(A)$ è il parallelogramma con vertici $(0,0), (1,0), (2,2)$ e $(1,2)$.

(b) Qual è l'immagine del punto $(1/2, 1/2)$? Trovare un punto che viene mandato in $(1/2, 1)$.

(c) La trasformazione lineare T è unica? Si argomenti la risposta.

(d) Trovare una trasformazione lineare T_1 che manda A in sè stesso.

(e) Trovare una trasformazione lineare T_2 tale che $T_2(1,0) = (1,0)$ e il parallelogramma $T_2(A)$ abbia area 4.

(f) Trovare una formula generale per la trasformazione lineare che manda A in un parallelgoramma di area k fissando il vertice $(1,0)$.