Foglio 4 di Esercizi

Geometria - AA 2023–2024
Ingegneria Elettronica

21 Novembre 2023

Esercizio 1. Per ciascuna delle seguenti triple di matrici si calcoli quando possibile

$$A(BC), (AB)C, {}^tA \cdot (BC), (AB) \cdot {}^tC, A \cdot {}^t(BC), {}^t(AB) \cdot C, A^2 \cdot (BC), (AB) \cdot C^2$$

- $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$
- $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$

Esercizio 2. Per ognuna delle seguenti matrici si calcoli l'inversa dopo aver verificato che le matrici sono invertibili.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$; 2. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$; 3. $\begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 7 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$; 4. $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 6 & 8 \\ 2 & 2 & 2 & 8 \\ 6 & 6 & 2 & 8 \\ 2 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$.

Esercizio 3. Per ogni coppia di funzioni lineari f, g si determini dominio e codominio, e per ogni composizione che ha senso tra $f \circ g$ e $g \circ f$ si scriva dominio e codominio, e si calcoli la matrice associata, i generatori e le equazioni cartesiane del nucleo e dell'immagine.

1.

$$f_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ -2x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} \qquad g_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + 2x_3 \\ -2x_1 + x_2 - 4x_3 \end{pmatrix}$$

2.

$$f_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ -2x_1 + 2x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{pmatrix} \qquad g_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + 2x_3 \\ x_1 + x_2 - x_3 \\ 2x_1 + x_3 \end{pmatrix}$$

3.

$$f_3\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1-x_2+2x_3\\x_1+x_2-x_3\\2x_1+x_3\\-2x_2+3x_3\end{pmatrix}\qquad g_3\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1-x_2+2x_3-x_4\\x_1+x_2-x_3-x_4\\2x_1+x_3-2x_4\end{pmatrix}$$

Esercizio 4. Si considerino le seguenti basi di $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$ rispettivamente:

$$\mathcal{B}=\{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\},\qquad \mathcal{C}=\{\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\},\qquad \mathcal{D}=\{\begin{pmatrix}2\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\}.$$

Si calcolino le seguenti matrici associate alle funzioni lineari al punto precedente, con $\mathcal{E}$ la base canonica appropriata e $\mathrm{id}_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la funzione identità (ovvero $\mathrm{id}_n(\vec{x}) = \vec{x}$ per ogni $\vec{x}$):

(a) $[\mathrm{id}_2]_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$;

(b) $[\mathrm{id}_3]_{\mathcal{E},\mathcal{C}}$;

(c) $[\mathrm{id}_4]_{\mathcal{D},\mathcal{D}}$;

(d) $[f_1]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$;

(e) $[f_2]_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$;

(f) $[f_3]_{\mathcal{D},\mathcal{C}}$;

(g) $[g_1]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$;

(h) $[g_2]_{\mathcal{C},\mathcal{E}}$;

(i) $[g_3 \circ f_3]_{\mathcal{C},\mathcal{C}}$.

Esercizio 5. Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la trasformazione lineare associata alla seguente matrice:

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&-2&2\\-2&2&1\\2&1&2\end{pmatrix}.$$

1. Calcolare generatori e equazioni cartesiane di nucleo e immagine di T;
2. Sapendo che T è una riflessione rispetto a un piano S, ovvero che esiste un piano $S \subset \mathbb{R}^3$ tale che per ogni $v \in S$ si ha $T(v) = v$, si calcoli una base e le equazioni cartesiane di S.
3. Calcolare, se esiste, un vettore $w \in \mathbb{R}^3$ tale che $T(w) = -w$.
4. Sia $N = \{w \in \mathbb{R}^3 : T(w) = -w\}$. Calcolare la dimensione di N.

Esercizio 6. Si costruisca (o si spieghi perchè non può esistere) una matrice 3×4 A tale che

- nullità $T_A = 2$;
- $\mathrm{col}(A) = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\-3\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\-2\\5\end{pmatrix}\}$.

Esercizio 7. Per ciascuna delle seguenti funzioni lineari si calcoli la matrice associata rispetto alle basi date, basi e dimensione del rango e del nucleo, e si discuta se la funzione è iniettiva e/o suriettiva e/o un isomorfismo.

(a) $f_1 : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definita da $f_1(p(x)) = p'(x)$ rispetto alla base $\mathcal{B}_1 = \{1+x, x+x^2, 1+x^2, x^3\}$ (stessa base per dominio e codominio);

(b) $f_2 : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definita da $f_2(p(x)) = p(x) - p(0)$ rispetto alle basi

$$\mathcal{B}_2 = \{1, x, x^2\} \text{ del dominio e } \mathcal{C}_2 = \{1 + x, x + x^2, 1 + x^2\} \text{ del codominio;}$$

(c) $f_3 : \mathcal{P}_4(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definita da $f_3(p(x)) = 3p'(x) - 4p''(x)$ rispetto alle basi

$$\mathcal{B}_3 = \{1, x - x^3, x^2, 1 + x^3, x^4\} \text{ del dominio e } \mathcal{C}_3 = \{1, x, x^2, x^3\} \text{ del codominio;}$$

(d) $f_4 : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathcal{M}_{2\times 2}$ definita da $f_4(A) = {}^tA - A$ rispetto alla base

$$\mathcal{B}_4 = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$$

(stessa base per dominio e codominio);

(e) $f_5 : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathbb{R}^2$ definita da $f_5(A) = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ rispetto alle basi $\mathcal{B}_4$ del punto precedente e $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 8. Si trovi una matrice $n \times n$ *invertibile* A e una matrice $n \times n$ B tale che rango$(AB) \neq$ rango(BA), o si spieghi perchè tali matrici non esistono.

Esercizio 9. Si trovi, o si spieghi perchè non possono esistere, due matrici A e B, entrambe 3×3, tali che

1. entrambe hanno nullità pari a uno;
2. AB è la matrice nulla.