Foglio 5 di Esercizi

Geometria - AA 2023–2024
Ingegneria Elettronica

10 Dicembre 2023

Esercizio 1. Per ognuna delle seguenti matrici si calcoli il determinante.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$;

2. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$;

3. $\begin{pmatrix} 8 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$;

4. $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$;

5. $\begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 7 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$;

6. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}^{3}$;

7. $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 6 & 8 \\ 2 & 2 & 2 & 8 \\ 6 & 6 & 2 & 8 \\ 2 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$.

8. $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 6 & 8 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \\ 8 & 8 & 8 & 16 \\ 2 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$.

Esercizio 2. Si consideri la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcolare la matrice aggiunta A^* e verificare che $A \cdot A^* = (\det A) \cdot I_3$;

(b) Usare A^* per calcolare l'inversa di A.

Esercizio 3. Per ciascuno dei seguenti sistemi lineari

- si verifichi che la matrice dei coefficienti è invertibile;
- si risolva il sistema usando la regola di Cramer;
- si verifichino le soluzioni.

1. $\begin{cases} X_1 + 2X_2 = -1 \\ -X_1 + X_2 = 2 \end{cases}$;

2. $\begin{cases} X_1 - X_2 - X_3 = -1 \\ -X_1 + 2X_2 = 2 \\ 2X_1 + X_2 + X_3 = 1 \end{cases}$;

3. $\begin{cases} X_1 \qquad\quad + 3X_3 = \ \ 1 \\ 2X_1 + X_2 + 2X_3 = \ \ 1 \\ X_1 \qquad\quad + \ \ X_3 = -1 \end{cases}$;

4. $\begin{cases} X_1 - X_2 - \ \ X_3 + \ \ X_4 = -1 \\ -X_1 + X_2 \qquad\qquad + \ \ X_4 = \ \ 2 \\ X_1 - X_2 - 2X_3 \qquad\quad\ = \ \ 1 \\ X_1 - X_2 - 3X_3 + 2X_4 = \ \ 0 \end{cases}$;

Esercizio 4. Per ognuna delle seguenti trasformazioni lineari discutere il valore del loro determinante, prima come congettura dedotta dalle proprietà geometriche (cioè pensando alla proprietà del determinante come area dell'immagine del quadrato unitario) e poi formalmente calcolando la matrice associata alla trasformazione.

1. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ data dalla rotazione di $\pi/3$;
2. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la riflessione lungo l'asse $y = x$. In questo caso $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$;
3. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la proiezione sull'asse xy ovvero $T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$.

Esercizio 5 (Determinanti e interpolazione)**.** Si consideri il problema di determinare un equazione quadratica

$$y = f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

il cui grafico passi per tre punti specificati $\mathbf{p}_1 = (p_1, q_1)$, $\mathbf{p}_2 = (p_2, q_2)$ e $\mathbf{p}_3 = (p_3, q_3)$. Si consideri la seguente espressione come equazione in x, y:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & y \\ 1 & p_1 & p_1^2 & q_1 \\ 1 & p_2 & p_2^2 & q_2 \\ 1 & p_3 & p_3^2 & q_3 \end{pmatrix} = 0.$$

(a) Si scriva l'equazione precedente usando $\mathbf{p}_1 = (0, 0)$, $\mathbf{p}_2 = (1, 1)$ e $\mathbf{p}_3 = (3, 5)$. Si risolva l'equazione per trovare una relazione del tipo $y =$ polonimo di secondo grado in x, e si verifichi che il suo grafico (di una parabola) passa per i tre punti $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ e $\mathbf{p}_3$;

(b) Spiegare perchè il metodo precente "funziona". Cosa succede se nella matrice precedente si sostituisce $(x, y) = \mathbf{p}_1 = (0, 0)$? Cosa significa questo per il polinomio $y = f(x)$?

(c) Si provi a generalizzare la costruzione per il problema di trovare una cubica, ovvero un'equazione del tipo $y =$ polinomio di *terzo* grado in x, che passa per 4 punti dati.

Esercizio 6. Per ciascuna delle seguenti trasformazioni lineari

- calcolare il polinomio caratteristico;
- cacolare gli autovalori e le loro molteplicità algebriche;
- per ciascun autovalore si calcoli una base dell'autospazio corrispondente e la molteplicità geometrica;
- si dica se f è diagonalizzabile e in caso affermativo si determini una base $\mathcal{B}$ di autovettori e la matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ di f rispetto a tale base;

- si trovi una matrice invertibile P tale che $P \cdot M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f) \cdot P^{-1}$ sia diagonale.

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$;
2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 - 4x_2 \\ 2x_1 - 3x_2 \end{pmatrix}$;
3. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + 4x_2 \\ -x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}$;
4. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x_1 + 5x_2 \\ -2x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}$;
5. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix}$;
6. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + 5x_2 - 9x_3 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 \\ x_1 - 3x_2 + 6x_3 \end{pmatrix}$;
7. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + 4x_2 - 8x_3 \\ x_1 - 3x_2 + 6x_3 \\ x_1 - 3x_2 + 6x_3 \end{pmatrix}$;
8. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 + 2x_3 \\ -x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$;

Esercizio 7. Si considerino le seguenti due matrici

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Si confrontino gli autovalori e gli autovettori di A, A^2 e A^{-1}. Che somiglianze o relazioni ci sono?

(b) Si confrontino gli autovalori e gli autovettori di A, B e $A \cdot B$;

(c) Si trovi una matrice invertibile P e una matrice diagonale D tali che $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$. Si calcoli poi la matrice A^{1000}.

(d) Sia $\vec{v}$ un autovettore di una matrice M, $n \times n$ con autovalore λ. Si dimostri che $\vec{v}$ è un autovettore della matrice $M + I_n$ ma con un diverso autovalore. Quale autovalore?

Esercizio 8. Si trovi una matrice 3×3 A tale che

1. $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ è autovettore di A con autovalore $\lambda = 1$;
2. $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore di A con autovalore $\lambda = 2$;

3. $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore di A con autovalore $\lambda = 10$.

Si osservi che $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.