

Università Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica  
AL110-Algebra 1 - A.A. 2016-2017 – prof. Cigliola  
Esercizi foglio n.11

**Esercizio 1.** Risolvere le seguenti equazioni congruenziali:

- (i)  $5x \equiv 8 \pmod{36}$
- (ii)  $24x \equiv 42 \pmod{15}$
- (iii)  $17x \equiv 3 \pmod{29}$
- (iv)  $3x \equiv 1 \pmod{5}$
- (v)  $15x \equiv 3 \pmod{7}$
- (vi)  $53x \equiv 7 \pmod{8}$
- (vii)  $10x \equiv 2 \pmod{6}$
- (viii)  $8x \equiv 4 \pmod{9}$
- (ix)  $200x \equiv 10 \pmod{15}$
- (x)  $24x \equiv 66 \pmod{30}$

**Esercizio 2.** Risolvere i seguenti sistemi di congruenze:

- (i) 
$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 5 \pmod{4} \\ x \equiv 3 \pmod{5} \end{cases}$$
- (ii) 
$$\begin{cases} 2x \equiv 4 \pmod{7} \\ 3x \equiv 0 \pmod{4} \\ 19x \equiv -8 \pmod{15} \end{cases}$$
- (iii) 
$$\begin{cases} x \equiv 8 \pmod{10} \\ x \equiv 0 \pmod{4} \\ x \equiv 4 \pmod{6} \end{cases}$$

**Esercizio 3.** Determinare gli elementi invertibili degli anelli  $\mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_{12}, \mathbb{Z}_{18}, \mathbb{Z}_{19}, \mathbb{Z}_{21}$  e  $\mathbb{Z}_{24}$ .

**Esercizio 4.** Determinare gli inversi degli elementi invertibili elencati nell'esercizio precedente.

**Esercizio 5.** Dimostrare che presi due qualsiasi numeri dispari  $a$  e  $b$  si ha che  $a^2 \equiv b^2 \pmod{4}$ .

**Esercizio 6.** Siano  $m$  ed  $n$  numeri interi positivi tali che  $m$  divide  $n$ . Provare che l'applicazione  $f: \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_m$ , tale che  $f([a]_n) = [a]_m$  è ben definita ed è suriettiva.

**Esercizio 7.** Siano  $k$  ed  $n$  numeri interi positivi. Provare che l'applicazione  $f: \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$ , tale che  $f([a]_n) = [ka]_n$  è biettiva se e solo se  $k$  ed  $n$  sono coprimi.

**Esercizio 8.** Dimostrare che l'equazione  $x^2 - y^2 = 6$  non ha soluzioni intere. Dimostrare inoltre che anche la congruenza associata modulo 4 è impossibile.

**Esercizio 9.** Trovare l'ultima e le ultime due cifre di  $2^{999}$ .

**Esercizio 10.** Trovare l'ultima e le ultime due cifre di  $a^2$ , al variare di  $a \in \mathbb{Z}$ .

**Esercizio 11.** Trovare le ultime due cifre di  $7^{7^7}$ .

**Esercizio 12.** Dimostrare che 11 divide  $20^{15} - 1$

**Esercizio 13.** Dimostrare che se  $k$  è pari allora 5 non divide  $13^{k+1} \pm 1$ .

**Esercizio 14.** Dimostrare che se  $k$  è dispari allora 7 divide  $13^{k+1} - 1$ .