Università Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
AL110-Algebra 1 - A.A. 2016-2017 – prof. Cigliola
Esercizi foglio n.13

Esercizio 1. Si definisca su $G \overset{\text{def}}{=} \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ l'operazione

$$(a,b) \bullet (c,d) = (ac, ad+b).$$

(i) Provare che $\bullet$ è effettivamente un'operazione interna su G.

(ii) Calcolare esplicitamente $[(-2,3) \bullet (\frac{4}{3}, -\frac{1}{2})] \bullet (\sqrt{2}, 0)$.

(iii) Provare che $(G, \bullet)$ è un gruppo.

(iv) Calcolare l'inverso di $(7, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

(v) Stabilire se $(G, \bullet)$ è gruppo abeliano.

Esercizio 2. Si definisca su $G \overset{\text{def}}{=} [0,1[$ l'operazione

$$x \bullet y = \begin{cases} x+y & \text{se } x+y<1 \\ x+y-1 & \text{se } x+y \geqslant 1 \end{cases}.$$

(i) Provare che $\bullet$ è effettivamente un'operazione interna su G.

(ii) Calcolare esplicitamente $(\sqrt{2}-1) \bullet \frac{1}{3}$.

(iii) Provare che $(G, \bullet)$ è un gruppo.

(iv) Stabilire se $(G, \bullet)$ è gruppo abeliano.

Esercizio 3. Si consideri l'insieme G costituito dalle matrici della forma $\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a coefficienti nel campo $\mathbb{Z}_3$. Si doti G dell'usuale prodotto riga per colonna. Provare che $(G, \cdot)$ è un gruppo e dire se è abeliano.

Esercizio 4. Si consideri il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ così definito:

$$G = \left\{ 2n + \sqrt{2}m \;\middle|\; m, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Si doti G dell'usuale somma tra numeri reali. Provare che $(G, +)$ è un gruppo abeliano.

Esercizio 5. Si consideri il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ così definito:

$$G = \left\{ n + \sqrt{2}m \;\middle|\; m, n \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Si doti G delle usuali operazioni di somma e moltiplicazione tra numeri reali. Provare che $(G, +, \cdot)$ è un campo.

Esercizio 6. Sia G un gruppo. Siano dati $a, b \in G$ tali che $a^{-1}b^2a = ba$. Provare che a e b commutano rispetto all'operazione di G.

Esercizio 7. Sia dato il sottoinsieme G di $M_2(\mathbb{Z}_6)$ costituito dalle matrici di tipo $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(i) Provare che G è gruppo rispetto al prodotto riga per colonna e stabilire se è abeliano.

(ii) Stabilire se l'applicazione $\phi : \mathbb{Z}_6 \to G$ tale che $\phi(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ è un omomorfismo di gruppi. Dire poi se è iniettivo o suriettivo. In caso sia invertibile, determinare esplicitamente ϕ^{-1}.

(iii) Stabilire se l'applicazione $\phi : \mathbb{Z}_6 \to G$ tale che $\phi(a) = \begin{pmatrix} 1 & 3a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ è un omomorfismo di gruppi. Dire poi se è iniettivo o suriettivo. In caso sia invertibile, determinare esplicitamente ϕ^{-1}.

(iv) Stabilire se l'applicazione $\phi : \mathbb{Z}_6 \to G$ tale che $\phi(a) = \begin{pmatrix} 1 & 4a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ è un omomorfismo di gruppi. Dire poi se è iniettivo o suriettivo. In caso sia invertibile, determinare esplicitamente ϕ^{-1}.

Esercizio 8. Considerare l'applicazione $f : \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_6$ definita come $f(a) = 3a^2 - 2a - 1$. Stabilire se f è un endomorfismo di $\mathbb{Z}_6$. Calcolare le controimmagini degli elementi di $\mathbb{Z}_6$ sotto l'azione di f.