

Università Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
AL110-Algebra 1 - A.A. 2016-2017 – prof. Cigliola
Esercizi foglio n.5

Esercizio 1. Per ciascuna delle seguenti relazioni, riconoscere che si tratta di una relazione di equivalenza e descrivere il relativo insieme quoziente:

- (i) similitudine nell'insieme dei triangoli del piano;
- (ii) parallelismo tra le rette del piano;
- (iii) fissato un insieme X ed un suo sottoinsieme E , sia $A\mathcal{R}B$ se e solo se $A \cap E = B \cap E$
- (iv) in \mathbb{R} sia $x\mathcal{R}x'$ se e solo se $x - x' \in \mathbb{Z}$
- (v) in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, sia $(x, y)\mathcal{R}(\bar{x}, \bar{y})$ se e solo se $\bar{x}^2 y = x^2 \bar{y}$

Esercizio 2. Si consideri la funzione $f : x \in \mathbb{Z} \rightarrow x^4 \in \mathbb{Q}$. Stabilire se f è iniettiva o suriettiva. Trovare inoltre $X_1 \neq X_2 \subseteq \mathbb{Z}$ e $Y_1 \neq Y_2 \subseteq \mathbb{Q}$ tali che $f(X_1) = f(X_2)$ e $f^{-1}(Y_1) = f^{-1}(Y_2)$.

Esercizio 3. Siano X e Y insiemi non vuoti. Provare che una relazione $\mathcal{R} \subseteq X \times Y$ è una funzione se e solo se $\Delta_X \subseteq \mathcal{R}\mathcal{R}^{-1}$ e $\mathcal{R}^{-1}\mathcal{R} \subseteq \Delta_Y$.

Esercizio 4. Siano X e Y insiemi. Sia $f : X \rightarrow Y$ una funzione. Siano poi $A_1, A_2 \subseteq X$ e $B_1, B_2 \subseteq Y$. Provare che

- (i) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$
- (ii) $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$
- (iii) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
- (iv) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

Provare inoltre che l'inclusione (ii) è in generale stretta e dimostrare che vale l'uguaglianza se e solo se f è iniettiva.

Esercizio 5. Siano X e Y insiemi. Sia $f : X \rightarrow Y$ una funzione. Si consideri la funzione $\bar{f} : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ che per ogni $A \subseteq X$ è tale che $\bar{f}(A) \stackrel{\text{def}}{=} f(A)$. Provare che \bar{f} è iniettiva (suriettiva) se e solo se f è iniettiva (risp. suriettiva).