Università Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
AL110-Algebra 1 - A.A. 2016-2017 – prof. Cigliola
Esercizi foglio n.6

Esercizio 1. Determinare tutte le relazioni di equivalenza sugli insiemi $A = \{ a, b, c \}$ e $B = \{ a, b, c, d \}$.

Esercizio 2. Siano S e T insiemi non vuoti e sia $f : S \to T$ un'applicazione iniettiva. Sia $\mathcal{F}$ una partizione di S. Provare che l'insieme

$$\mathcal{F}^* = \{ f(X) \mid X \subseteq S \}$$

realizza una partizione di $\operatorname{Im} f$. Provare inoltre che la iniettività di f è una condizione necessaria.

Esercizio 3. Si consideri la funzione $f : x \in \mathbb{Z} \to x^4 \in \mathbb{Q}$. Descrivere in tutti i dettagli la relazione nucleo indotta da f su $\mathbb{Z}$ e il relativo insieme quoziente.

Esercizio 4. Si consideri la funzione $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definita come

$$f(n) = \begin{cases} n^2 - 2 & n \geqslant 2 \\ n + 2 & n \leqslant 1. \end{cases}$$

Descrivere in tutti i dettagli la relazione nucleo indotta da f su $\mathbb{Z}$ e il relativo insieme quoziente.

Esercizio 5. Si consideri la funzione $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ definita come

$$f(n) = \begin{cases} 0 & n \leqslant 0 \\ n^2 - 1 & n > 0. \end{cases}$$

Descrivere in tutti i dettagli la relazione nucleo indotta da f su $\mathbb{Z}$ e il relativo insieme quoziente.

Esercizio 6. Sia X un insieme e sia $B \subsetneq X$ un sottoinsieme non vuoto di X. Si consideri la funzione

$$f : A \in \mathcal{P}(X) \to A \cap B \in \mathcal{P}(X).$$

(i) Dire se f è iniettiva.

(ii) Dire se f è suriettiva.

(iii) Calcolare la controimmagine $f^{-1}(\{ B, X, \varnothing \})$.

(iv) Descrivere in tutti i dettagli la relazione nucleo indotta da f su $\mathcal{P}(X)$ e il relativo insieme quoziente.

Esercizio 7. Si consideri la funzione $f : x \in \mathbb{Z} \to x^2 \in \mathbb{Z}$. Descrivere in tutti i dettagli la relazione nucleo indotta da f su $\mathbb{Z}$ e il relativo insieme quoziente.

Esercizio 8. Si consideri la funzione $f : x \in \mathbb{Z} \to x^4 \in \mathbb{Q}$. Descrivere in tutti i dettagli la relazione nucleo indotta da f su $\mathbb{Z}$ e il relativo insieme quoziente.

Esercizio 9. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geqslant 0 \\ x(3 - x) & x < 0. \end{cases}$$

Dimostrare che f è invertibile e determinare esplicitamente la sua inversa. Come sono fatte le classi di equivalenza di $\mathbb{R}$ modulo la relazione nucleo indotta da f?

Esercizio 10. Si consideri la funzione $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ definita come

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \in \mathbb{Z} \\ x & \text{se } x \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Dimostrare che f è invertibile e determinare esplicitamente la sua inversa.

Esercizio 11 (difficile)**.** Costruire una biezione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R} \setminus \{ 0 \}$.

Esercizio 12. Siano S, T, V, W insiemi non vuoti e siano $f : S \to T$ $g : T \to V$ e $h : V \to W$ applicazioni. Dimostrare che se le applicazioni $g \circ f$ e $h \circ g$ sono biettive, allora anche f, g e h sono biettive.

Esercizio 13. Si consideri in $\mathbb{Z}$ la relazione binaria $\mathcal{R}$ tale che $a\mathcal{R}b$ se e solo se $a^2 - b^2$ è multiplo di 4. Provare che $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza, determinare esplicitamente la classe di equivalenza di 3 modulo $\mathcal{R}$ e trovare l'insieme quoziente $\mathbb{Z}/\mathcal{R}$.