Università Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
AL110-Algebra 1 - A.A. 2016-2017 – prof. Cigliola
Esercizi foglio n.7

Esercizio 1. Dimostrare che per ogni numero naturale $n \geqslant 1$ valgono le seguenti formule:

(i) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

(ii) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(iii) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

(iv) $1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$

Esercizio 2. Provare che per ogni numero naturale $n \geqslant 1$ si ha che

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \sqrt{n}.$$

Esercizio 3. Dimostrare che per ogni numero naturale n risulta che

$$\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}.$$

Esercizio 4. Dimostrare che per ogni $n \geqslant 2$ si ha

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \geqslant \frac{7}{12}$$

Esercizio 5. Dimostrare che per ogni $n \geqslant 1$ si ha

$$\sum_{k=1}^{n} k2^k = 2^{n+1}(n-1) + 2.$$

Esercizio 6. Data una funzione $f : X \to X$, si indica con f^n la composizione di f fatta n volte con sé stessa. Consideriamo la funzione $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tale che $f(x) = 3x + 2$, per ogni $x \in \mathbb{Z}$. Trovare una formula (e dimostrarla per induzione) per il calcolo di $f^n(x)$, per ogni $n \geqslant 1$.

Esercizio 7. Sia $n \geqslant 1$. Provare che

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} \geqslant 0.$$

Esercizio 8. Sia data la successione $F(n)$ definita ricorsivamente come segue:

$$F(0) = 1 \qquad F(1) = 1 \qquad F(n) = F(n-1) + F(n-2).$$

Dimostrare che si ha:

(i) $F(n) < 2^n$, con $n \geqslant 1$;

(ii) $F(n) < \left(\dfrac{7}{4}\right)^n$, con $n \geqslant 1$;

(iii) $F(n) \geqslant \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$, con $n \geqslant 1$;

(iv) $F(n) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$, con $n \geqslant 1$.