Università Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
AL110-Algebra 1 - A.A. 2016-2017 – prof. Cigliola
Esercizi foglio n.8

Esercizio 1. Per ciascuna delle seguenti funzioni definite su $\mathbb{N}$ si dia una definizione per ricorrenza:

(i) $f(n) = 3n + 2$

(ii) $f(n) = \frac{1}{n}$

(iii) $f(n) = 4n + 5$

(iv) $f(n) = \log(n)$

(v) $f(n) = e^n$

(vi) $f(n) = \sin n$

Esercizio 2. Dimostrare che per ogni numero naturale n risulta che

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Esercizio 3. Dimostrare che per ogni numero naturale n risulta che

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$$

Esercizio 4. Dimostrare che per ogni $n, k \in \mathbb{N}$, con $0 < k \leqslant n$, si ha

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Esercizio 5. Sia data la successione a_n definita ricorsivamente come segue:

$$a_0 = 1 \qquad\qquad a_n = 2\ a_{n-1}.$$

Determinare una formula per il calcolo diretto di a_n, per ogni $n \in \mathbb{N}$ e dimostrarne la validità per induzione.

Esercizio 6. Sia data la successione a_n definita ricorsivamente come segue:

$$a_0 = 1 \qquad\qquad a_n = n\ a_{n-1}.$$

Determinare una formula per il calcolo diretto di a_n, per ogni $n \in \mathbb{N}$ e dimostrarne la validità per induzione.

Esercizio 7. Sia data la successione a_n definita ricorsivamente come segue:

$$a_0 = 1 \qquad\qquad a_1 = 1 \qquad\qquad a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}.$$

Determinare una formula per il calcolo diretto di a_n, per ogni $n \in \mathbb{N}$ e dimostrarne la validità per induzione.

Esercizio 8. Sia data la successione a_n definita ricorsivamente come segue:

$$a_0 = 0 \qquad\qquad a_n = a_{n-1} + 2n + 1.$$

Determinare una formula per il calcolo diretto di a_n, per ogni $n \in \mathbb{N}$ e dimostrarne la validità per induzione.

Esercizio 9. Trovare il MCD tra le seguenti coppie di numeri interi e scrivere per ciascuno di essi una indentità di Bézout:

(i) $625,\ 32$

(ii) $180,\ 252$

(iii) $-744,\ 415$

(iv) $86, \ -86$

(v) $-104, \ 105$

Esercizio 10. Siano dati i numeri interi $a, b, c \in \mathbb{Z}$ non nulli. Provare che:

(i) $\mathrm{MCD}(ab, ac) = |a| \,\mathrm{MCD}(b, c)$.

(ii) Se $\mathrm{MCD}(a, b) = d$ allora $\mathrm{MCD}(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1$.

(iii) $\mathrm{MCD}(a, b) = 1$ e $\mathrm{MCD}(a, c) = 1$ se e solo se $\mathrm{MCD}(a, bc) = 1$.

(iv) $\mathrm{MCD}(a, b)$ è un divisore di $a - b$.