Università Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
AL110-Algebra 1 - A.A. 2017-2018 – prof. Cigliola
Esercizi foglio n.1

Esercizio 1. Siano dati gli insiemi $A = \{ a, b, 0, 1, 2, * \}$, $B = \{ a, c, *, 1 \}$, $C = \{ b, c, 0, 3 \}$ e $D = \emptyset$. Calcolare:

(i) $(A \cup B) \smallsetminus (A \cap B)$;

(ii) $[(A \cap B) \cap (C \cup D)] \smallsetminus (A \cup B)$;

(iii) $(A \cup B \cup C) \cap (B \cup C \cup D)$.

Esercizio 2. Siano S e T insiemi. Dimostrare che $S = T$ se e solo se esiste un insieme V per cui si abbia $S \cap V = T \cap V$ e $S \cup V = T \cup V$.

Esercizio 3. Siano S, T, V insiemi. Dimostrare che $S \cap T \subseteq V$ se e solo se $S \subseteq V \cup (S \smallsetminus T)$.

Esercizio 4. Siano S, T insiemi. Dimostrare che $S \smallsetminus (S \smallsetminus T) = S \cap T$.

Esercizio 5. Siano S, T, V insiemi. Dimostrare che

(i) $S \cap (T \cup V) = (S \cap T) \cup (S \cap V)$;

(ii) $S \cup (T \cap V) = (S \cup T) \cap (S \cup V)$.

Esercizio 6. Siano p e q proposizioni. Mostrare che $\overline{\overline{p} \wedge q} \vee p = \overline{q} \vee p$.

Esercizio 7. Siano A e B insiemi. Posto $A \Delta B = (A \smallsetminus B) \cup (B \smallsetminus A)$ la differenza simmetrica di A e B, provare che $A \Delta B = (A \cup B) \smallsetminus (A \cap B)$.

Esercizio 8. Siano A, B, C insiemi. Dimostrare che si ha $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.

Esercizio 9. Siano S, T, V insiemi. Dimostrare che $(S \smallsetminus T) \smallsetminus V \subseteq S \smallsetminus (T \smallsetminus V)$. Provare con un esempio che in generale l'inclusione è stretta. Provare infine che vale l'uguaglianza se e solo se $S \cap V = \emptyset$.

Esercizio 10. Calcolare l'insieme delle parti dell'insieme $A = \{ 1, \{ 1 \}, 2 \}$.
Calcolare inoltre $A \cup \mathcal{P}(A)$, $A \cap \mathcal{P}(A)$ e $\mathcal{P}(A) \smallsetminus A$.

Esercizio 11. Siano S, T insiemi. Dimostrare che $S \subseteq T$ se e solo se $\mathcal{P}(S) \subseteq \mathcal{P}(T)$.

Esercizio 12. Siano S, T insiemi. Dimostrare che $\mathcal{P}(S \cap T) = \mathcal{P}(S) \cap \mathcal{P}(T)$.

Esercizio 13. Siano S, T insiemi. Dimostrare che $\mathcal{P}(S) \cup \mathcal{P}(T) \subseteq \mathcal{P}(S \cup T)$. Provare che in generale l'inclusione è stretta. Dimostrare che vale l'uguaglianza se e solo se $S \subset T$ o $T \subseteq S$.

Esercizio 14. Dimostrare che $Card(A \cup B \cup C) = Card(A) + Card(B) + Card(C) - Card(A \cap B) - Card(A \cap C) - Card(B \cap C) + Card(A \cap B \cap C)$.