Università Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
AL110-Algebra 1 - A.A. 2017-2018 – prof. Cigliola
Esercizi foglio n.12

Esercizio 1. Sia n un intero maggiore di 1. Determinare il numero di trasposizioni di S_n.

Esercizio 2. Sia n un intero positivo e sia $\sigma \in S_n$ un ciclo di lunghezza k. Provare che se k è dispari, allora anche σ^2 è un k-ciclo, se invece k è pari, allora σ^2 è prodotto di due $\frac{k}{2}$-cicli.

Esercizio 3. Si consideri la seguente permutazione in S_8:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 3 & 7 & 5 & 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

Decomporre σ nel prodotto di cicli disgiunti e determinare l'ordine di σ. Provare che σ è una permutazione pari. Determinare σ^{-1}, σ^2, σ^3, σ^4, σ^5, σ^{-4} e σ^{-3}.

Esercizio 4. Si consideri la seguente permutazione in S_7:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Decomporre σ nel prodotto di cicli disgiunti e determinare l'ordine di σ. Provare che σ è una permutazione dispari. Determinare σ^{-1}, σ^2, σ^3, σ^4, σ^5, σ^{-4} e σ^{-3}.

Esercizio 5. Si consideri la seguente permutazione in S_{12}:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 2 & 6 & 8 & 12 & 3 & 1 & 10 & 9 & 5 & 11 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Decomporre σ nel prodotto di cicli disgiunti e determinare l'ordine di σ. Determinare σ^{-1}, σ^2, σ^3, σ^4, σ^5, σ^{-4} e σ^{-3}.

Esercizio 6. Si considerino le permutazioni in S_7:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 & 6 & 7 \end{pmatrix} \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 4 & 5 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Decomporre σ e τ nel prodotto di cicli disgiunti e calcolare $\sigma^{-1}\tau^2\sigma^3$ e $(\sigma\tau\sigma^{-3})^{-1}$.

Esercizio 7. Si considerino le permutazioni in S_8:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 7 & 1 & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix} \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 1 & 2 & 5 & 7 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Decomporre σ e τ nel prodotto di cicli disgiunti e calcolare $\sigma^{-1}\tau^3\sigma^2$ e $(\sigma\tau\sigma^{-1})^2$.

Esercizio 8. Si considerino le permutazioni in S_9:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 8 & 7 & 2 & 3 & 9 \end{pmatrix} \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 6 & 7 & 5 & 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

Decomporre σ e τ nel prodotto di cicli disgiunti e calcolare $\sigma^{-2}\tau^2\sigma^{-1}$ e $(\sigma^2\tau^{-1}\sigma^{-1})^2$.

Esercizio 9. Si definisca su $G \overset{\text{def}}{=} \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ l'operazione

$$(a,b) \bullet (c,d) = (ac, ad + b).$$

(i) Provare che $\bullet$ è effettivamente un'operazione interna su G.

(ii) Calcolare esplicitamente $[(-2,3) \bullet (\frac{4}{3}, -\frac{1}{2})] \bullet (\sqrt{2}, 0)$.

(iii) Provare che $(G, \bullet)$ è un gruppo.

(iv) Calcolare l'inverso di $(7, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

(v) Stabilire se $(G, \bullet)$ è gruppo abeliano.

Esercizio 10. Si definisca su $G \overset{\text{def}}{=} [0,1[$ l'operazione

$$x \bullet y = \begin{cases} x+y & \text{se } x+y<1 \\ x+y-1 & \text{se } x+y \geqslant 1 \end{cases} .$$

(i) Provare che $\bullet$ è effettivamente un'operazione interna su G.

(ii) Calcolare esplicitamente $(\sqrt{2}-1) \bullet \frac{1}{3}$.

(iii) Provare che $(G,\bullet)$ è un gruppo.

(iv) Stabilire se $(G,\bullet)$ è gruppo abeliano.

Esercizio 11. Si consideri il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ così definito:

$$G = \left\{ 2n + \sqrt{2}m \;\middle|\; m,n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Si doti G dell'usuale somma tra numeri reali. Provare che $(G,+)$ è un gruppo abeliano.

Esercizio 12. Si consideri il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ così definito:

$$G = \left\{ n + \sqrt{2}m \;\middle|\; m,n \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Si doti G delle usuali operazioni di somma e moltiplicazione tra numeri reali. Provare che $(G,+,\cdot)$ è un campo.

Esercizio 13. Sia G un gruppo. Siano dati $a,b \in G$ tali che $a^{-1}b^2a = ba$. Provare che a e b commutano rispetto all'operazione di G.

Esercizio 14. Considerare l'applicazione $f : \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_6$ definita come $f(a) = 3a^2 - 2a - 1$. Stabilire se f è un endomorfismo di $\mathbb{Z}_6$. Calcolare le controimmagini degli elementi di $\mathbb{Z}_6$ sotto l'azione di f.