Università Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
AL110-Algebra 1 - A.A. 2018-2019
Esercizi foglio n.2

Esercizio 1. Sia data la famiglia di sottoinsiemi $(A_i \mid i \in I)$ di un insieme X. Provare le formule di De Morgan generalizzate:

(i) $X \setminus \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (X \setminus A_i)$

(ii) $X \setminus \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (X \setminus A_i)$

Esercizio 2. Sia A un insieme. Determinare l'unione e l'intersezione della famiglia di sottoinsiemi di A.

Esercizio 3. Siano S, T, V insiemi. Dimostrare che

(i) $(S \cap T) \times V = (S \times V) \cap (S \times V)$;

(ii) $(S \cup T) \times V = (S \times V) \cup (S \times V)$.

Esercizio 4. Siano S, T, V, W insiemi. Dimostrare che

(i) $(S \times T) \cap (V \times W) = (S \cap V) \times (T \cap W)$;

(ii) $(S \times T) \cup (V \times W) \subseteq (S \cup V) \times (T \cup W)$.

Si provi inoltre che l'inclusione della (ii) è in generale stretta.

Esercizio 5. Siano S e T insiemi non vuoti non costituiti da un solo elemento. Trovare un sottoinsieme di $S \times T$ che non è del tipo $X \times Y$, con $X \subseteq S$ e $Y \subseteq T$.

Esercizio 6. Dati $X = \{1, 2, 3, 4\}$ e $Y = \{1, 3, 5\}$, determinare il grafico della corrispondenza $\leqslant$ in $X \times Y$.

Esercizio 7. Dati $X = \{2, 3, 4, 7\}$ e $Y = \{3, 8, 10\}$, determinare il grafico della corrispondenza $\mathcal{R}$ in $X \times Y$, dove $x \mathcal{R} y$ se e solo se x è un divisore di y.

Esercizio 8. Rappresentare graficamente le seguenti relazioni binarie definite in $\mathbb{R}$:

(i) $x \mathcal{R} y$ se e solo se $2x - 3y = 6$

(ii) $x \mathcal{R} y$ se e solo se $y > x^2$

(iii) $x \mathcal{R} y$ se e solo se $x^2 + y^2 < 25$ oppure $x \geqslant 3$

(iv) $x \mathcal{R} y$ se e solo se $|x| \geqslant 3$ e $|y| \leqslant 2$.

Esercizio 9. Dire se le seguenti relazioni godono delle proprietà riflessiva, simmetrica, antisimmetrica, transitiva, totale:

(i) la perpendicolarità nell'insieme delle rette del piano;

(ii) l'inclusione tra i sottoinsiemi di un fissato insieme X;

(iii) in $\mathbb{Z}$, $x \mathcal{R} y$ se e solo se $x - y$ è un multiplo di 5;

(iv) in $\mathbb{Q}$, $x \mathcal{R} y$ se e solo se $|x| = |y|$;

(v) tra i sottoinsiemi di un insieme X, $A\mathcal{R}B$ se e solo se $A \cap B = \emptyset$.

Esercizio 10. Elencare tutte le relazioni riflessive definite sull'insieme $S = \{1,2\}$.

Esercizio 11. Siano $X = \{1,2,9\}$, $Y = \{4,5,8\}$ e $Z = \{4,8,10,11\}$. Si considerino le relazioni $x\mathcal{R}y$ se e solo se $x \leqslant y$ in $X \times Y$ e $y\mathcal{R}'z$ se e solo se y è un divisore di z in $Y \times Z$. Determinare il grafico della relazione composta $\mathcal{R}\mathcal{R}'$.

Esercizio 12. Determinare due insiemi X ed Y ed una corrispondenza $\mathcal{R} \subset X \times Y$ tale che $\mathcal{R}\mathcal{R}^{-1}$ non sia confrontabile con Δ_X e $\mathcal{R}^{-1}\mathcal{R}$ non sia confrontabile con Δ_Y.

Esercizio 13. Sia dato $X = \{2,3,4,6,8,9\}$ ordinato secondo la divisibilità. Sia poi $Y = \{3,6,8\}$ e $Z = \{4,8\}$. Determinare, se esistono, il massimo e il minimo, gli elementi massimali e gli elementi minimali di X. Trovare maggioranti e minoranti, estremo superiore ed inferiore di Y e Z. Rappresentare poi il diagramma di Hasse di X.

Esercizio 14. Rappresentare graficamente il diagramma di Hasse dell'insieme delle parti di $X = \{a,b\}$ ordinato secondo l'inclusione insiemistica.

Esercizio 15. Sia $X = \mathcal{P}(\mathbb{N} \setminus \{0\})$. Si consideri in esso la relazione $\leqslant$ così definita:

$$Y \leqslant Z \quad \Leftrightarrow \quad Y = Z \quad \text{oppure} \quad y|z, \quad \text{per ogni } y \in Y \text{ e } z \in Z.$$

(i) Provare che $\leqslant$ è una relazione d'ordine su X.

(ii) Determinare, se esistono, il massimo e il minimo di X.

(iii) Esibire, se esiste, una catena infinita di X.

(iv) Determinare, se esistono, estremo superiore e inferiore in X dell'insieme $Y = \{\{2,4\}, \{12\}, \{5,7\}\}$.

(v) Determinare, se esistono, estremo superiore e inferiore in X dell'insieme

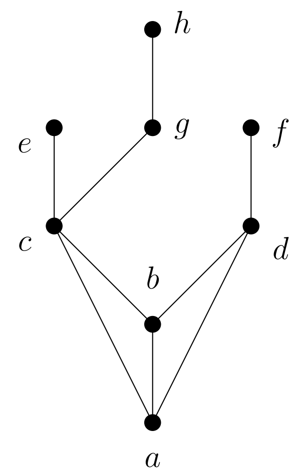
$$Y = \{\{m\} \mid m \in \mathbb{N},\ m \neq 0\}.$$

(vi) Sia $r \in \mathbb{N}$, $r \neq 0$. Provare che l'insieme

$$R = \{rk \mid k \in \mathbb{N}, k \neq 0\}$$

è un elemento massimale in X.

Esercizio 16. Sull'insieme $X = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g,\ h\}$ sia data la relazione d'ordine il cui diagramma lineare di Hasse è il seguente:



(a) Determinare (se esistono) elementi massimali e minimali, massimo e minimo di X.

(b) Trovare, se esistono, due distinti sottoinsiemi di X che ammettono entrambi come insieme dei maggioranti l'insieme $Y = \{d,\ f\}$.

(c) Trovare, se esiste, un sottoinsieme di X che ammette come estremo superiore g e come estremo inferiore b.

(d) Determinare, se esistono, l'insieme dei maggioranti, l'insieme dei minoranti, il minimo, il massimo, l'estremo inferiore e l'estremo superiore dei sottoinsiemi di X:

$$A = \{b,\ c,\ d\} \qquad\qquad B = \{f,\ c,\ g\}.$$

(e) Elencare tutte le catene (ovvero i sottoinsiemi totalmente ordinati di X) che contengono l'elemento c.

Esercizio 17. Sia dato l'insieme $S := \mathbb{N} \smallsetminus \{6\}$.

(i) Stabilire se ogni sottoinsieme di S costituito da due elementi è dotato di estremo superiore e/o estremo inferiore in S rispetto all'ordinamento naturale $\leqslant$.

(ii) Stabilire se ogni sottoinsieme di S costituito da due elementi è dotato di estremo superiore e/o estremo inferiore in S rispetto all'ordinamento indotto dalla relazione di divisibilità.

Esercizio 18. Sia Ω l'insieme costituito dai sottoinsiemi di cardinalità 2 di $\mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$:

$$\Omega = \{X = \{m,n\} \mid m,n \in \mathbb{N},\ m \neq 0,\ n \neq 0\}$$

Preso ora un elemento di $X = \{m,n\} \in \Omega$, definiamo il *prodotto* di X come

$$p(X) = m \cdot n.$$

Definiamo su Ω la seguente relazione d'ordine $\trianglelefteq$:

$$X \trianglelefteq Y \qquad \Leftrightarrow \qquad X = Y \quad \text{oppure} \quad p(X) < p(Y).$$

(i) Stabilire se $\trianglelefteq$ è totale.

(ii) Determinare, se esistono, massimo, minimo, elementi massimali e minimali di Ω.

(iii) Risolvere in Ω la disequazione:

$$X \trianglelefteq \{1,4\}.$$

(iv) Si consideri il sottoinsieme di Ω:

$$\Pi = \{\{2,3\};\ \{6,1\};\ \{4,3\};\ \{2,1\};\ \{6,2\}\}$$

Determinare, se esistono, l'insieme dei maggioranti, l'insieme dei minoranti, l'estremo superiore e l'estremo inferiore di Π in Ω.