

**Università Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica**  
**AL110-Algebra 1 - A.A. 2017-2018 – prof. Cigliola**  
**Esercizi foglio n.4**

**Esercizio 1.** Sia dato  $X = \{2, 3, 4, 6, 8, 9\}$  ordinato secondo la divisibilità. Sia poi  $Y = \{3, 6, 8\}$  e  $Z = \{4, 8\}$ . Determinare, se esistono, il massimo e il minimo, gli elementi massimali e gli elementi minimali di  $X$ . Trovare maggioranti e minoranti, estremo superiore ed inferiore di  $Y$  e  $Z$ . Rappresentare poi il diagramma di Hasse di  $X$ .

**Esercizio 2.** Rappresentare graficamente il diagramma di Hasse dell'insieme delle parti di  $X = \{a, b\}$  ordinato secondo l'inclusione insiemistica.

**Esercizio 3.** Sia  $X = \mathcal{P}(\mathbb{N} \setminus \{0\})$ . Si consideri in esso la relazione  $\leq$  così definita:

$$Y \leq Z \iff Y = Z \text{ oppure } y|z, \text{ per ogni } y \in Y \text{ e } z \in Z.$$

- (i) Provare che  $\leq$  è una relazione d'ordine su  $X$ .
- (ii) Determinare, se esistono, il massimo e il minimo di  $X$ .
- (iii) Esibire, se esiste, una catena infinita di  $X$ .
- (iv) Determinare estremo superiore e inferiore in  $X$  dell'insieme  $Y = \{\{2, 4\}, \{12\}, \{5, 7\}\}$ .
- (v) Determinare estremo superiore e inferiore in  $X$  dell'insieme  $Y = \{\{m\} \mid m \in \mathbb{N}, m \neq 0\}$ .
- (vi) Sia  $r \in \mathbb{N}, r \neq 0$ . Provare che l'insieme  $R = \{rk \mid k \in \mathbb{N}, k \neq 0\}$  è un elemento massimale in  $X$ .