Università Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
AL110-Algebra 1 - A.A. 2018-2019
Esercizi foglio n.5

Esercizio 1. Dimostrare che per ogni numero naturale $n \geqslant 1$ valgono le seguenti formule:

(i) $1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

(ii) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(iii) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

(iv) $1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$

Esercizio 2. Provare che per ogni numero naturale $n \geqslant 1$ si ha che

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \sqrt{n}.$$

Esercizio 3. Dimostrare che per ogni numero naturale n risulta che

$$\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n} = 2-\frac{1}{2^n}.$$

Esercizio 4. Dimostrare che per ogni $n \geqslant 2$ si ha

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \geqslant \frac{7}{12}$$

Esercizio 5. Dimostrare che per ogni $n \geqslant 1$ si ha

$$\sum_{k=1}^{n} k2^k = 2^{n+1}(n-1)+2.$$

Esercizio 6. Data una funzione $f : X \to X$, si indica con f^n la composizione di f fatta n volte con sé stessa. Consideriamo la funzione $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tale che $f(x) = 3x+2$, per ogni $x \in \mathbb{Z}$. Trovare una formula (e dimostrarla per induzione) per il calcolo di $f^n(x)$, per ogni $n \geqslant 1$.

Esercizio 7. Sia $n \geqslant 1$. Provare che

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \, \frac{1}{k} \geqslant 0.$$

Esercizio 8. Dimostrare che per ogni numero naturale n risulta che

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n} = 2^n$$

Esercizio 9. Dimostrare che per ogni numero naturale n risulta che

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n} = 0$$

Esercizio 10. Dimostrare che per ogni $n, k \in \mathbb{N}$, con $0 < k \leqslant n$, si ha

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$$