Università Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
AL110-Algebra 1 - A.A. 2017-2018 – prof. Cigliola
Esercizi foglio n.9

Esercizio 1. Siano dati i numeri interi $a, b, c \in \mathbb{Z}$ non nulli. Si ponga poi per definizione

$$a\mathbb{Z} = \{ \, ka \mid k \in \mathbb{Z} \, \} \, .$$

Provare che:

(i) $a\mathbb{Z} \subseteq b\mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad b|a$

(ii) Detto $h = \mathrm{mcm}(a, b)$, allora $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = h\mathbb{Z}$.

(iii) $\mathrm{mcm}(ac, bc) = |c|\mathrm{mcm}(a, b)$

(iv) Se $\mathrm{MCD}(a, b) = 1$, allora $\mathrm{mcm}(a, b) = |ab|$

(v) $\mathrm{MCD}(a, b) \cdot \mathrm{mcm}(a, b) = |ab|$

(vi) $\mathrm{mcm}(a, b) = |b| \quad \Leftrightarrow \quad a|b \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{MCD}(a, b) = |a|$

Esercizio 2. Determinare gli inversi aritmetici degli elementi invertibili modulo m, con $m = 1, ..., 40$.

Esercizio 3. Dimostrare che presi due qualsiasi numeri dispari a e b si ha che $a^2 \equiv b^2 \pmod 4$.

Esercizio 4. Dimostrare che se k è pari allora 5 non divide $13^{k+1} \pm 1$.

Esercizio 5. Dimostrare che se k è dispari allora 7 divide $13^{k+1} - 1$.