Università degli Studi Roma Tre
Corso di laurea in Matematica
GE210-Geometria 2 – A.A. 2015-2016
APPELLO A

Esercizio 1. Si consideri la quadrica

$$\mathscr{Q}:\ 2xy - 2yz + 2x + 1 = 0.$$

Giustificando esaurientemente le risposte, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

(a) L'intersezione di $\mathscr{Q}$ col piano $z = 0$ è un'iperbole.

(b) $\mathscr{Q}$ contiene la retta che passa per i punti $(-\frac{1}{2}, 0, 0)$ e $(-\frac{1}{2}, 0, -1)$.

(c) $\mathscr{Q}$ è un ellissoide a punti reali.

(d) $\mathscr{Q}$ ha grafico illimitato.

Esercizio 2. Sia $k \in \mathbb{R}$. Si consideri la forma quadratica su $\mathbb{R}^4$ definita da

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2k\, x_1 x_4 + 2x_2 x_3.$$

(a) Determinare la matrice associata a Q rispetto alla base canonica.

(b) Determinare rango e segnatura di Q al variare di k.

(c) Diagonalizzare Q al variare di k esplicitando la base diagonalizzante usata.

(d) Al variare di k, determinare la dimensione del complemento ortogonale rispetto a Q del sottospazio $U = \mathcal{L}((1,0,0,-1),(1,1,0,0),(1,-1,1,-1))$

Esercizio 3. Si consideri la curva algebrica piana

$$\mathscr{E}:\ x^2(x + y + 1) - x^2 - y^2 = 0.$$

(a) Trovare i punti singolari di $\mathscr{E}$ e classificarli.

(b) Trovare e gli asintoti di $\mathscr{E}$.

(c) Si tracci il grafico di $\mathscr{E}$.

Esercizio 4. Considerare il polinomio

$$f(x, y) = 2x^2 + xy - 5x - 6y^2 + 11y - 3 \in \mathbb{R}[x, y]$$

Stabilire se $f(x, y)$ è decomponibile ed in caso positivo, esibire una sua fattorizzazione.

Presa poi la conica $\mathcal{C}:\ f(x, y) = 0$, determinare una forma canonica della sua chiusura proiettiva (rispetto a X_0).

Esercizio 5. (a) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinare la distanza del piano $y + z = 0$ dalla retta $r: \begin{cases} x + ky = 1 \\ x - y + z = 0. \end{cases}$

(b) Trovare la circonferenza dello spazio tangente l'asse x nel punto $A(2, 0, 0)$ e passante per il punto $B(1, -1, 2)$.

Esercizio 6. Al variare del parametro reale t, determinare il numero di punti fissi e di rette fisse della proiettività del piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ la cui matrice associata è (a meno di costante moltiplicativa):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & t^2 \\ 0 & t & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$