Università degli Studi Roma Tre
Corso di laurea in Matematica
GE210-Geometria 2 – A.A. 2015-2016
APPELLO C

Esercizio 1. Si consideri la quadrica

$$\mathscr{Q}: \; x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2x - 1 = 0.$$

(a) Portare in forma canonica e classificare la quadrica $\mathscr{Q}$.

(b) Determinare, se esiste, una retta interamente contenute in $\mathscr{Q}$.

(c) Determinare, se esistono, due piani π_1 e π_2 che intersecano rispettivamente la quadrica $\mathscr{Q}$ in una parabola ed in un'ellisse non degenere.

Esercizio 2. Al variare del parametro reale k, si consideri la forma bilineare simmetrica b su $\mathbb{R}^4$ associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Sia $W = \mathcal{L}((1,1,0,0),\ (1,0,0,1)) \subset \mathbb{R}^4$ e $W^\perp$ il sottospazio ortogonale di W rispetto a b.

(a) Determinare rango e segnatura di b al variare di k.

(b) Al variare di k si trovi una base diagonalizzante per b.

(c) Per quali valori di k i sottospazi W e $W^\perp$ sono a somma diretta?

Esercizio 3. Sia F un endomorfismo simmetrico di $\mathbb{R}^4$ che ammette come autovalori 1 e 0. Illustrando la risposta, dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

(a) Può capitare che $F(1,1,0,0) = (0,0,0,0)$; $F(1,1,-1,-1) = (1,1,-1,-1)$ e che $F(1,1,1,1) = (0,0,0,0)$.

(b) Può capitare che $F(1,-1,-2,3) = (1,2,3,4)$; $F(1,1,-1,-1) = (1,2,3,4)$ e che $F(1,2,3,4) = (1,2,3,4)$.

(c) Può capitare che $F(1,6,-2,1) = (1,2,3,4)$; $F(1,1,-1,-1) = (1,1,-1,-1)$ e che $F(1,1,1,1) = (0,0,0,0)$.

(d) Può capitare che $F(1,1,1,1) = (2,2,2,2)$ e che $F(1,-1,1,-1) = (2,1,3,0)$.

Esercizio 4. Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, sia data la famiglia di coniche

$$\mathscr{F} : kx^2 + 4xy + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0.$$

Si consideri poi la conica proiettiva

$$\mathscr{A} : \; X_1^2 + 2X_2^2 - X_0^2 + 2X_1X_2 - 2X_2X_0 = 0.$$

(a) Provare che la famiglia $\mathscr{F}$ è costituita da coniche tutte degeneri.

(b) Classificare e descrivere al variare di k le coniche della famiglia $\mathscr{F}$.

(c) Trovare una proiettività F di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ che porta la conica $\mathscr{A}$ nella sua forma canonica proiettiva. Dire inoltre se F ha punti fissi.

(d) Provare che non esiste alcun cambiamento di coordinate omogenee che trasforma la chiusura proiettiva delle coniche della famiglia $\mathscr{F}$ nella conica $\mathscr{A}$.

Esercizio 5. Nello spazio sono date le rette

$$r: \begin{cases} x = 1 \\ z = 2y \end{cases} \qquad \text{e} \qquad s: \begin{cases} y = 1 \\ z = x \end{cases}$$

(a) Stabilire la posizione reciproca tra r ed s.

(b) Calcolare la distanza tra r ed s.

(c) Determinare le sfere che hanno centro sul piano $\pi : \; x + y + z = 0$, che sono tangenti alla retta r nel punto $A(1, 0, 0)$ e che sono tangenti alla retta s.

Esercizio 6. Si considerino nel piano affine reale i punti $A(1,-1)$ e $B(1,0)$ e le rette

$$r: \ x = 1 \qquad\qquad s: \ y = 0$$

Determinare, se esiste, un'affinità f tale che $f(A) = B$, $f(r) = r$, $f(s) = s$. Discutere inoltre l'unicità di tale affinità.