Università degli Studi Roma Tre
Corso di laurea in Matematica
GE210-Geometria 2 – A.A. 2014-2015
Appello A

Esercizio 1. Sia data la conica piana euclidea $\mathscr{C}:\ 3x^2 - 4xy + 8x + 5 = 0$.

(a) Classificare $\mathscr{C}$ e trovare una sua forma canonica.

(b) Disegnare $\mathscr{C}$.

(c) Detta $\mathscr{C}_0$ la chiusura proiettiva di $\mathscr{C}$ rispetto ad X_0, trovare, se esiste, una proiettività che trasforma $\mathscr{C}_0$ nella conica $\mathscr{C}' : X_0^2 + X_1^2 + 2X_2^2 + 2X_0X_2 = 0$.

Esercizio 2. Nel piano affine reale sono dati il punto $A(1,2)$ e le rette

$$r_1 : \ y = 0 \qquad\qquad r_2 : \ x = 1 \qquad\qquad r_3 : \ y = x + 1.$$

Determinare, se esistono, tutte le affinità $f : \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ tali che

$$f(A) = A \qquad\qquad f(r_1) = r_1 \qquad\qquad f(r_2) = r_3$$

Tra le affinità trovate, c'è qualche isometria?

Esercizio 3. Si consideri la forma quadratica $q : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ tale che

$$q\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_4)^2.$$

(a) Determinare rango e segnatura di q.

(b) Trovare una base di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ diagonalizzante per q e scrivere l'espressione di q rispetto a tale base.

(c) Dimostrare che ogni base diagonalizzante per q contiene esattamente una matrice della forma $\begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}$, con $\alpha \neq 0$.

Esercizio 4. Al variare di $k \in \mathbb{R}$, classificare la posizione reciproca delle rette

$$r_k : \begin{cases} x + ky - 1 = 0 \\ 2y - z + k = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad s : \begin{cases} x = t \\ y = t - 2 \\ z = 2t. \end{cases}$$

Stabilito che per $k = 0$ le rette r_0 ed s sono sghembe, determinare la retta di minima distanza tra r_0 ed s.

Esercizio 5. Nel piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ sono dati i punti

$$P_1[1,0,0] \qquad P_2[1,0,1] \qquad Q_1[1,1,1] \qquad Q_2[1,1,0]$$

e la retta $r: \; X_0 = 0$. Trovare, se esiste, una proiettività $F : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tale che $F(P_1) = P_2$, $F(Q_1) = Q_2$ e $F(A) = A$, per ogni punto $A \in r$.