Sapienza Università di Roma – Facoltà ICI
Laurea in Ingegneria Energetica A.A. 2016/17
Prova1 di Analisi Matematica II – 19 Gennaio 2018

1)	2)	3)	4)	5)	Tot.

N.B. La parte sovrastante è riservata al docente.

Nome:	Mat.:

"*What's in your head, in your head*
Zombie, zombie, zombie."
(The Cranberries)

AVVERTENZE. Non è consentito utilizzare, pena l'annullamento della prova, note, libri di testo, appunti, calcolatrici, cellulari, tablet, supporti cartacei o elettronici in genere. Le risposte del primo esercizio non vanno giustificate. Tutte le altre sì ed in maniera chiara e concisa.

Esercizio 1.
Parte A. Per ciascuna delle seguenti questioni, si indichi la (sola) risposta corretta. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta errata −1 punto ed ogni risposta non data 0 punti.

A1) Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{per} \quad -\pi < x \leqslant 0 \\ 2x & \text{per} \quad 0 < x \leqslant \pi \end{cases}$$

definita in $(-\pi, \pi]$ e prolungata per periodicità su tutto l'asse reale. Sia poi $S(x)$ la funzione somma della serie di Fourier di $f(x)$.

(a) La serie di Fourier converge ad f uniformemente in $[-3, 3]$.
(b) Si ha che $S(7\pi) = \frac{\pi}{2}$.
(c) La funzione S è discontinua in $x_0 = -\pi$.
(d) La serie di Fourier di f converge a π in $x_0 = \pi$.

A2) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$

$$A = (1, 2] \times \mathbb{Z}$$

(a) è connesso.
(b) ha frontiera limitata.
(c) è privo di punti di accumulazione.
(d) ha parte interna vuota.

Parte B. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false. Ogni risposta esatta vale $0,5$ punti, ogni risposta errata $-0,25$ punti ed ogni risposta non data 0 punti.

B1) La funzione di due variabili:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{per } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

V **F** è continua nell'origine.

V **F** è derivabile nell'origine.

V **F** è differenziabile nell'origine.

V **F** è differenziabile nel punto $(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{4})$.

B2) Si consideri la superficie:

$$\Sigma : \begin{cases} x = u^2 + v^2 \\ y = u + v \\ z = u - v \end{cases}$$

definita al variare di $(u,v) \in [0,2] \times [0,2]$.

V **F** La superficie Σ contiene l'origine.

V **F** Il punto $P(2,2,0)$ appartiene a Σ.

V **F** Il vettore $v = (1,2,0)$ è normale a Σ in P.

V **F** Il piano tangente a Σ in P ha equazione $x + 2y + k - 6 = 0$.

B3) Il dominio della funzione di tre variabili

$$f(x,y,z) = \frac{1}{\log(4 - x^2 - y^2 - z^2)} + \frac{75\,y}{x}$$

è

V **F** limitato.

V **F** l'unione di una sfera e di una retta.

V **F** aperto.

V **F** connesso.

Esercizio 2. Si consideri la forma differenziale in due variabili

$$\omega = \left(\frac{y}{x^2y^2+1} + 2\right) dx + \frac{x}{x^2y^2+1}\, dy$$

(i) (**1pt**) Dire se ω è chiusa.

(ii) (**1pt**) Stabilire se ω è esatta.

(iii) (**2pt**) Determinare tutte le primitive di ω.

(iv) (**1pt**) Calcolare la primitiva di ω che vale -3 nell'origine.

(v) (**1pt**) Calcolare l'integrale curvilineo di ω lungo la poligonale spezzata aperta di vertici $A(1,1)$, $B(-5,11)$, $C(43,17)$ e $D(-1,-1)$.

Esercizio 3. (i) (**3pt**) Si studino la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2+x^2},$$

per $x \in [0,+\infty)$.

(ii) (**3pt**) Si studino la convergenza puntuale e totale della serie di funzioni

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2+x^2},$$

per $x \in [0,+\infty)$.

Esercizio 4. Sia data la funzione di due variabili

$$f(x,y) = x^3y + xy - 2x + 5.$$

(i) (**2pt**) Calcolare e classificare i punti critici di f.

(ii) (**2pt**) Trovare l'equazione del piano tangente al grafico di f nel suo punto $(1,0,f(1,0))$.

(iii) (**2pt**) Studiare massimi e minimi locali e assoluti di f lungo il vincolo dato dal segmento

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = -3,\ -2 \leqslant y \leqslant 2\}$$

Esercizio 5. Si consideri la regione dello spazio

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid\ z^2 \geqslant x^2+y^2;\ \ 0 \leqslant z \leqslant 4;\ \ y \geqslant 0\}.$$

(i) (**2pt**) Rappresentare graficamente W.

(ii) (**1pt**) Descrivere W utilizzando coordinate cilindriche.

(iii) (**3pt**) Calcolare la coordinata z del baricentro del solido W.