

Sapienza Università di Roma – Facoltà ICI
 Laurea in Ingegneria Energetica A.A. 2016/17
 Prova3 di Analisi Matematica II – 22 Giugno 2017

1)	2)	3)	4)	5)	Fac.	Tot.
----	----	----	----	----	------	------

N.B. La parte sovrastante è riservata al docente.

Nome:	Mat.:
-------	-------

“La velocità della luce non si decide per alzata di mano.”
 (P. Angela)

AVVERTENZE. Non è consentito utilizzare, pena l’annullamento della prova, note, libri di testo, appunti, calcolatrici, cellulari, tablet, supporti cartacei o elettronici in genere. Le risposte del primo esercizio non vanno giustificate. Tutte le altre sì ed in maniera chiara e concisa.

Esercizio 1.

Parte A. Per ciascuna delle seguenti questioni, si indichi la (sola) risposta corretta. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta errata -1 punto ed ogni risposta non data 0 punti.

A1) Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \log(x^2 + 1) + 1 & \text{per } -\pi < x < 0 \\ 0 & \text{per } x = 0, \pi \\ -\log(x^2 + 1) - 1 & \text{per } 0 < x < \pi \end{cases}$$

definita in $(-\pi, \pi]$ e prolungata per periodicità su tutto l’asse reale. Sia poi $S(x)$ la funzione somma della serie di Fourier di $f(x)$.

- (a) Si trova che il coefficiente $a_{18} = -\frac{\sin(17)}{36}$.
- (b) La funzione S è discontinua per $x = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.
- (c) La funzione S è continua.
- (d) Si ha che $S(19) = 0$.

A2) Sono date la forma differenziale

$$\omega = (e^{x+y} - 4x) dx + e^{x+y} dy$$

e la curva parametrica

$$\gamma: \begin{cases} x = 30 \cos t \\ y = 5 \sin t \end{cases} \quad \text{con } t \in [0, 2\pi].$$

- (a) L’integrale di ω lungo γ vale 150π .
- (b) La primitiva f di ω che vale 1 nell’origine è $f(x, y) = e^{x+y} - 2x^2$.
- (c) La curva gamma non è semplice.
- (d) La forma ω non è esatta.

Parte B. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false. Ogni risposta esatta vale 0,5 punti, ogni risposta errata -0,25 punti ed ogni risposta non data 0 punti.

B1) Si consideri il sottoinsieme dello spazio

$$A \stackrel{\text{def}}{=} [1, 2) \times (1, 3] \times \{-1\}.$$

- V** **F** La chiusura di A è un rettangolo.
 V **F** L'insieme A è aperto.
 V **F** L'insieme dei punti di accumulazione di A coincide con A .
 V **F** L'insieme A è chiuso.
 V **F** L'insieme A è connesso.

B2) Sia data la funzione $f(x) = e^{-x^2}$. Sia poi $S(x)$ la funzione somma della serie di Taylor di $f(x)$ di punto iniziale $x_0 = 0$.

- V** **F** Si ha che $f^{(10)}(0) = \frac{10!}{5!}$.
 V **F** $f^{(127)}(0) = 0$.
 V **F** Si ha che $S'(3) = \frac{1}{3}$.

B3) Sono dati il campo vettoriale

$$\mathbf{E} = (3yz - 2x) \mathbf{i} + 3xz \mathbf{j} + 3xy \mathbf{k},$$

e i tre punti

$$A(1, 1, -5) \qquad B(1, -2, 2) \qquad C(2, -1, -1).$$

- V** **F** Si ha che $\int_{AC} \mathbf{E} \cdot ds = \int_{CA} \mathbf{E} \cdot ds$, dove i segmenti si intendono orientati dal primo estremo verso il secondo.
 V **F** Si ha che $\text{rot } \mathbf{E}$ è il campo vettoriale costantemente nullo.
 V **F** Detto ∂T il (bordo del) triangolo ABC percorso in verso orario, si ha che $\int_{\partial T} \mathbf{E} \cdot ds = 0$.
 V **F** La divergenza di \mathbf{E} vale 2 sul punto A .

Esercizio 2. Calcolare l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n 7^n}{n^2} x^n.$$

Calcolare inoltre l'insieme di convergenza della sua serie derivata.

Esercizio 3. Si consideri la curva descritta dall'equazione

$$\mathcal{C} : x^3 + xy^2 - 4xy + y^2 = 0,$$

e sia $P_0(-1, \frac{1}{4}) \in \mathcal{C}$.

- (i) **(1pt)** Provare che esiste una funzione reale di variabile reale $y = \phi(x)$ il cui grafico coincide *localmente* con il grafico di \mathcal{C} in un intorno del punto P_0 .
- (ii) **(1pt)** Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di ϕ nel punto P_0 .
- (iii) **(2pt)** Calcolare il polinomio di Taylor arrestato al secondo ordine di punto iniziale P_0 della funzione ϕ .
- (iv) **(2pt)** Dimostrare che i punti regolari di \mathcal{C} per i quali la retta tangente è parallela alla bisettrice $y = x$ sono ottenuti risolvendo il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} x^3 + xy^2 - 4xy + y^2 = 0 \\ 3x^2 + y^2 + 2xy - 4x - 2y = 0. \end{cases}$$

Esercizio 4. Si consideri la funzione di due variabili

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{2x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (i) **(3pt)** Stabilire se la funzione f è continua nell'origine.
- (ii) **(3pt)** Calcolare i punti stazionari di f lungo la retta $x + 2y + 1 = 0$.

Esercizio 5. Si consideri la regione dello spazio

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \leq 5 - x^2 - y^2, \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, \quad x^2 + y^2 \leq 2\}.$$

- (i) **(2pt)** Rappresentare graficamente W .
- (ii) **(2pt)** Determinare il baricentro di W .
- (iii) **(2pt)** Calcolare l'area della superficie di W .

Esercizio Facoltativo. (10pt.) Si dimostri il seguente risultato.

Teorema (di Gauss). Sia dato nel piano il poligono \mathcal{P} con $n \geq 3$ lati i cui vertici sono i punti

$$P_1 = (x_1, y_1) \quad P_2 = (x_2, y_2) \quad \dots \quad P_n = (x_n, y_n).$$

Allora l'area di \mathcal{P} è data dalla formula:

$$\mathcal{A}(\mathcal{P}) = \frac{1}{2} |x_1y_2 + x_2y_3 + \dots + x_ny_1 - y_1x_2 - y_2x_3 - \dots - y_nx_1|.$$