Sapienza Università di Roma – Facoltà ICI
Laurea in Ingegneria Energetica A.A. 2016/17
Prova1 di Analisi Matematica II – 13 Luglio 2017

1)	2)	3)	4)	5)	Fac.	Tot.

N.B. La parte sovrastante è riservata al docente.

Nome:	Mat.:

"*Tranquilli, ho un piano!*"
(W. A. Mozart)

AVVERTENZE. Non è consentito utilizzare, pena l'annullamento della prova, note, libri di testo, appunti, calcolatrici, cellulari, tablet, supporti cartacei o elettronici in genere. Le risposte del primo esercizio non vanno giustificate. Tutte le altre sì ed in maniera chiara e concisa.

Esercizio 1.
Parte A. Per ciascuna delle seguenti questioni, si indichi la (sola) risposta corretta. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta errata −1 punto ed ogni risposta non data 0 punti.

A1) La serie di funzioni

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{\arctan(nx)}{x^2+n^2+1}$$

(a) diverge per $x=\pi$.
(b) converge uniformemente su tutto l'asse reale.
(c) non converge totalmente sugli intervalli contenenti $x_0=0$.
(d) converge puntualmente ma non assolutamente su $(-\infty,\ a)$, con $a<0$.

A2) Sia data la successione di funzioni

$$f_n(x)=\frac{\arctan(nx)}{x^2+n+1}.$$

(a) La successione ha per limite puntuale la funzione costante $f(x)=\frac{\pi}{2}$.
(b) La successione converge uniformemente alla funzione costantemente nulla in intervalli di tipo $(a,+\infty)$, con $a>0$ e diverge per $x<0$.
(c) La successione converge puntualmente ma non uniformemente in intervalli di tipo $(-a,\ a)$, con $a>0$.
(d) Nessuna delle precedenti è vera.

Parte B. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false. Ogni risposta esatta vale $0,5$ punti, ogni risposta errata $-0,25$ punti ed ogni risposta non data 0 punti.

B1) Si consideri la superficie parametrica definita da

$$\Phi : \begin{cases} x = uv \\ y = 1 + 3u, \\ z = v^3 + 2u \end{cases} \qquad \text{con } (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

V **F** La superficie Φ passa per il punto $O(0, 0, 0)$.

V **F** Il piano tangente a Φ nel punto $P(1, 4, 3)$ ha equazione $\pi :\ 9x - y - 3z + 4 = 0$.

V **F** Il vettore $v = (9, 1, 3)$ è normale a Φ nel punto $P(1, 4, 3)$.

V **F** La superficie Φ è regolare in ogni suo punto.

B2) Sia data la funzione $f(x) = x \sin(2x)$. Sia poi $S(x)$ la funzione somma della serie di Taylor di $f(x)$ di punto iniziale $x_0 = 0$.

V **F** La funzione S è di classe $\mathcal{C}^\infty$.

V **F** Si ha che $S'(\pi) = 0$.

V **F** Si ha che $f^{(10)}(0) = 10 \cdot 2^9$.

V **F** $f^{(2017)}(0) = -2017$.

B3) Si consideri la funzione di due variabili $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$. Sia D il suo dominio.

V **F** L'insieme D è semplicemente connesso.

V **F** La funzione f è differenziabile in $P = (-1, 5)$.

V **F** Si ha che $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$.

V **F** La chiusura di D è $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 2. Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{per } \ -\pi < x \leqslant \pi \quad \text{e} \quad x \neq 0 \\ \pi & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

definita in $(-\pi, \pi]$ e prolungata per periodicità su tutto l'asse reale. Sia poi $S(x)$ la funzione somma della serie di Fourier di $f(x)$.

(i) (**3pt**) Trovare lo sviluppo in serie di Fourier di f.

(ii) (**1,5pt**) Calcolare $S(10\pi)$, $S(10)$ e $S(-\pi)$.

(iii) (**1,5pt**) A partire dallo sviluppo in serie di Fourier trovato per f, si dia un metodo per il calcolo approssimato di π.

Esercizio 3. Si consideri la curva descritta dall'equazione

$$\mathscr{C}: \; x^3 - 2xy^2 + 2x - y = 0.$$

e sia $P_0(-1,-1) \in \mathscr{C}$.

(i) (**1pt**) Provare che esiste una funzione reale di variabile reale $x = \psi(y)$ il cui grafico coincide *localmente* con il grafico di $\mathscr{C}$ in un intorno del punto P_0.

(ii) (**1pt**) Calcolare la retta tangente al grafico di ψ in $y_0 = -1$.

(iii) **(4pt)** Calcolare e classificare i punti stazionari della funzione

$$f(x,y) = x^3 - 2xy^2 + 2x - y$$

lungo il vincolo espresso da $x^2 - y^2 = 0$.

Esercizio 4. Si consideri la forma differenziale

$$\omega = \frac{z}{x+y}\; dx + \frac{z}{x+y}\; dy + \log(x+y)\; dz$$

definita nel dominio

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0,\; y > 0,\; z > 0\}.$$

(i) (**2pt**) Provare che ω è esatta su A.

(ii) (**2pt**) Trovare, se esiste, una primitiva f di ω tale che $f(1,1,1) = 1$.

(iii) (**2pt**) Calcolare l'integrale $\int_\gamma \omega$, dove γ è la linea spezzata che congiunge (nell'ordine) i punti $A(1,1,1)$, $B(2,1,2)$, $C(2,1,3)$ e $D(4,3,2)$.

Esercizio 5. Si consideri la regione dello spazio

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \; x^2 + y^2 - 9 \leqslant \; z \; \leqslant 3 - \sqrt{x^2 + y^2}\}.$$

(i) (**2pt**) Rappresentare graficamente W.

(ii) (**2pt**) Calcolare l'integrale

$$\iiint\limits_W x^2 dx\, dy\, dz$$

(iii) (**2pt**) Calcolare l'area della superficie di W.

Esercizio Facoltativo. Un acquario di forma sferica con raggio R, viene riempito fino all'altezza $h > R$. Calcola il volume occupato dall'acqua.