

Sapienza Università di Roma – Facoltà ICI
Laurea in Ingegneria Energetica A.A. 2016/17
Prova3 di Analisi Matematica II – 13 Luglio 2017

1)	2)	3)	4)	5)	Fac.	Tot.
----	----	----	----	----	------	------

N.B. La parte sovrastante è riservata al docente.

Nome:	Mat.:
-------	-------

“Tranquilli, ho un piano!”
(W. A. Mozart)

AVVERTENZE. Non è consentito utilizzare, pena l’annullamento della prova, note, libri di testo, appunti, calcolatrici, cellulari, tablet, supporti cartacei o elettronici in genere. Le risposte del primo esercizio non vanno giustificate. Tutte le altre sì ed in maniera chiara e concisa.

Esercizio 1.

Parte A. Per ciascuna delle seguenti questioni, si indichi la (sola) risposta corretta. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta errata -1 punto ed ogni risposta non data 0 punti.

A1) La serie di funzioni

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\arctan(nx)}{x^2 + n^2 + 2}$$

- (a) converge puntualmente ma non assolutamente su $(-\infty, a)$, con $a > 0$.
- (b) converge uniformemente su tutto l’asse reale.
- (c) non converge totalmente sugli intervalli contenenti $x_0 = 1$.
- (d) diverge per $x = \pi$.

A2) Sia data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{\arctan(nx)}{x^2 + n^2 + 3}.$$

- (a) La successione converge uniformemente alla funzione costantemente nulla in intervalli di tipo $(a, +\infty)$, con $a > 0$ e diverge per $x < 0$.
- (b) La successione ha per limite puntuale la funzione costante $f(x) = \frac{\pi}{2}$.
- (c) La successione converge puntualmente ma non uniformemente in intervalli di tipo $(-a, a)$, con $a > 0$.
- (d) Nessuna delle precedenti è vera.

Parte B. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false. Ogni risposta esatta vale 0,5 punti, ogni risposta errata -0,25 punti ed ogni risposta non data 0 punti.

B1) Si consideri la superficie parametrica definita da

$$\Phi : \begin{cases} x = uv \\ y = 1 + 3u, \\ z = v^3 + 2u \end{cases} \quad \text{con } (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

- V** **F** La superficie Φ non passa per l'origine.
- V** **F** Il piano tangente a Φ nel punto $P(1, 4, 3)$ ha equazione $\pi : 9x - y - 3z - 4 = 0$.
- V** **F** Il vettore $v = (9, -1, -3)$ è normale a Φ nel punto $P(1, 4, 3)$.
- V** **F** La superficie Φ è regolare in ogni suo punto.

B2) Sia data la funzione $f(x) = x \sin(2x)$. Sia poi $S(x)$ la funzione somma della serie di Taylor di $f(x)$ di punto iniziale $x_0 = 0$.

- V** **F** La funzione S'' è di classe \mathcal{C}^∞ .
- V** **F** Si ha che $S'(2\pi) = 0$.
- V** **F** Si ha che $f^{(10)}(0) = 10 \cdot 2^{10}$.
- V** **F** $f^{(113)}(0) = -\sin(113)$.

B3) Si consideri la funzione di due variabili $f(x, y) = \arctan \frac{x}{y}$. Sia D il suo dominio.

- V** **F** L'insieme D è semplicemente connesso.
- V** **F** La funzione f è derivabile in $P = (-7, 3)$.
- V** **F** Si ha che $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 1$.
- V** **F** La frontiera di D è vuota.

Esercizio 2. Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{per } -\pi \leq x < \pi \quad \text{e} \quad x \neq 0 \\ \pi & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

definita in $[-\pi, \pi)$ e prolungata per periodicità su tutto l'asse reale. Sia poi $S(x)$ la funzione somma della serie di Fourier di $f(x)$.

- (i) **(3pt)** Trovare lo sviluppo in serie di Fourier di f .
- (ii) **(1,5pt)** Calcolare $S(10\pi)$, $S(-1)$ e $S(3\pi)$.
- (iii) **(1,5pt)** A partire dallo sviluppo in serie di Fourier trovato per f , si dia un metodo per il calcolo approssimato di π .

Esercizio 3. Si consideri la curva descritta dall'equazione

$$\mathcal{C} : x^3 - 2xy^2 + 2x - y = 0.$$

e sia $P_0(0, 0) \in \mathcal{C}$.

- (i) **(1pt)** Provare che esiste una funzione reale di variabile reale $x = \psi(y)$ il cui grafico coincide *localmente* con il grafico di \mathcal{C} in un intorno del punto P_0 .
- (ii) **(1pt)** Calcolare la retta tangente al grafico di ψ in $y_0 = 0$.
- (iii) **(4pt)** Calcolare e classificare i punti stazionari della funzione

$$f(x, y) = x^3 - 2xy^2 + 2x - y$$

lungo il vincolo espresso da $x^2 - y^2 = 0$.

Esercizio 4. Si consideri la forma differenziale

$$\omega = \frac{z}{x+2y} dx + \frac{2z}{x+2y} dy + \log(x+2y) dz$$

definita nel dominio

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0, y > 0, z > 0\}.$$

- (i) **(2pt)** Provare che ω è esatta su A .
- (ii) **(2pt)** Trovare, se esiste, una primitiva f di ω tale che $f(1, 0, 1) = 1$.
- (iii) **(2pt)** Calcolare l'integrale $\int_{\gamma} \omega$, dove γ è la linea spezzata che congiunge (nell'ordine) i punti $A(1, 1, 1)$, $B(2, 1, 2)$, $C(2, 1, 3)$ e $D(4, 3, 2)$.

Esercizio 5. Si consideri la regione dello spazio

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - 16 \leq z \leq 4 - \sqrt{x^2 + y^2}\}.$$

- (i) **(2pt)** Rappresentare graficamente W .
- (ii) **(2pt)** Calcolare l'integrale

$$\iiint_W x^2 dx dy dz$$

- (iii) **(2pt)** Calcolare l'area della superficie di W .

Esercizio Facoltativo. Un acquario di forma sferica con raggio R , viene riempito fino all'altezza $h > R$. Calcola il volume occupato dall'acqua.