Sapienza Università di Roma – Facoltà ICI
Laurea in Ingegneria Energetica A.A. 2016/17
Prova di Analisi Matematica II – 3 Novembre 2017

Esercizio 1. Sia data la funzione di due variabili

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(i) (**3pt**) Studiare la continuità di f nell'origine.

(ii) (**3pt**) Studiare la derivabilità di f nell'origine.

(iii) (**3pt**) Studiare la differenziabilità di f nell'origine.

Esercizio 2. Si consideri la regione dello spazio

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \; x^2+y^2+z^2 \leqslant 1; \quad z^2 \geqslant x^2+y^2; \quad z \leqslant 0\}.$$

(i) (**2pt**) Rappresentare graficamente W.

(ii) (**3pt**) Calcolare il volume di W.

Esercizio 3. (**4pt**) Studiare la convergenza puntuale e totale della serie

$$\sum_{n\geqslant 1} \left(3^n + \frac{1}{n^3}\right) x^n.$$

Esercizio 4. (**5pt**) Si dica se la forma differenziale

$$\omega = \left(\frac{2x}{x^2+y^2} - y^2\right) dx \;+\; \left(\frac{2y}{x^2+y^2} - 2xy\right) dy$$

è esatta nel dominio $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\, y < 0\}$ e trovare in caso affermativo tutte le sue primitive.

Esercizio 5. (**3pt**) Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{per } \; -\pi \leqslant x \leqslant 0 \\ \;\;0 & \text{per } \;\; 0 < x < \pi \end{cases}$$

definita in $[-\pi,\pi)$ e prolungata per periodicità su tutto l'asse reale. Sia poi $S(x)$ la funzione somma della serie di Fourier di $f(x)$. Calcolare $S(3)$, $S(5\pi)$ e $S(-12\pi)$.

Esercizio 6. (**4pt**) Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2x^2+2}.$$