Sapienza Università di Roma – Facoltà ICI
Laurea in Ingegneria Energetica A.A. 2016/17
Prova1 di Analisi Matematica II – 20 Settembre 2017

1)	2)	3)	4)	5)	Tot.

N.B. La parte sovrastante è riservata al docente.

Nome:	Mat.:

"*Avete più paura voi ad emanare questa sentenza che non io nel riceverla.*"
(G. Bruno)

AVVERTENZE. Non è consentito utilizzare, pena l'annullamento della prova, note, libri di testo, appunti, calcolatrici, cellulari, tablet, supporti cartacei o elettronici in genere. Le risposte del primo esercizio non vanno giustificate. Tutte le altre sì ed in maniera chiara e concisa.

Esercizio 1.

Parte A. Per ciascuna delle seguenti questioni, si indichi la (sola) risposta corretta. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta errata −1 punto ed ogni risposta non data 0 punti.

A1) Il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,5)} \frac{e^{x^2+(y-5)^2}-1}{x^2+(y-5)^2}$$

(a) vale 1.
(b) non esiste.
(c) vale 5.
(d) vale 0.

A2) Sia data la funzione

$$f(x) = 3xe^{x^2}.$$

Allora $f^{(11)}(0)$ vale

(a) 0
(b) $\dfrac{3 \cdot 11!}{5!}$
(c) $3 \cdot 11! \cdot 5!$
(d) 3

Parte B. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false. Ogni risposta esatta vale $0,5$ punti, ogni risposta errata $-0,25$ punti ed ogni risposta non data 0 punti.

B1) Sia γ il segmento che congiunge i punti $A(1,2)$ e $B(-1,1)$.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ La curva γ è semplice e aperta.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ La lunghezza di γ è 2.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ Si ha che $\displaystyle\int_\gamma |y|\, ds = \frac{3}{2}$.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ Una parametrizzazione di γ è data da $\begin{cases} x = -1 - 4t \\ y = 1 - 2t, \end{cases}$ al variare di $t \in [0,1]$.

B2) Si consideri la superficie:

$$\Sigma : \begin{cases} x = u^2 + v^2 + 1 \\ y = uv - 3 \\ z = u - v + 1 \end{cases}$$

definita al variare di $(u,v) \in [1,2] \times [1,2]$.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ La superficie Σ contiene l'origine.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ La superficie Σ è regolare in ogni suo punto.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ Il punto $P(3,-2,1)$ appartiene a Σ.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ Il vettore $v = (-1,2,10)$ è normale a Σ in P.

B3) Il dominio della funzione di tre variabili

$$f(x,y,z) = \frac{17}{\sqrt{z - x^2 - y^2}} - \log(4 - z)$$

è

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ semplicemente connesso.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ aperto.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ chiuso.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ limitato.

Esercizio 2. Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } -\pi < x \leqslant 0 \\ x & \text{per } \quad 0 < x \leqslant \pi \end{cases}$$

definita in $(-\pi,\pi]$ e prolungata per periodicità su tutto l'asse reale. Sia poi $S(x)$ la funzione somma della serie di Fourier di $f(x)$.

(i) (**3pt**) Trovare lo sviluppo in serie di Fourier di f.

(ii) (**3pt**) Calcolare $S(-8\pi)$, $S(3)$ e $S(7\pi)$.

Esercizio 3. (i) (**3pt**) Si studino la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{1}{n + 2x^n},$$

per $x \in [0, +\infty)$.

(ii) (**3pt**) Si studino la convergenza puntuale e totale della serie di funzioni

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n + 2x^n},$$

per $x \in [0, +\infty)$.

Esercizio 4. Sia data la funzione di due variabili

$$f(x, y) = x(x^2 + y^2 - 3) - y^2.$$

(i) (**2pt**) Si provi che il punto $P = (-1; 0)$ è un punto critico per f e se ne classifichi la natura.

(ii) (**2pt**) Trovare l'equazione del piano tangente al grafico di f nel suo punto $(1, 1, f(1, 1))$.

(iii) (**2pt**) Studiare massimi e minimi locali e assoluti di f lungo il vincolo dato da $y = x$.

Esercizio 5. Si consideri la regione dello spazio

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \ x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4; \quad x^2 + y^2 \leqslant 1; \quad z \geqslant 0; \quad y \geqslant 0\}.$$

(i) (**2pt**) Rappresentare graficamente W.

(ii) (**2pt**) Descrivere W utilizzando coordinate cilindriche.

(iii) (**2pt**) Calcolare l'integrale

$$\iiint_W z \, dxdydz.$$