

Sapienza Università di Roma – Facoltà ICI
Laurea in Ingegneria Energetica A.A. 2016/17
Seconda simulazione di esame Analisi Matematica II

1)	2)	3)	4)	5)	Fac.	Tot.
----	----	----	----	----	------	------

N.B. La parte sovrastante è riservata al docente.

Nome:	Mat.:
-------	-------

AVVERTENZE. Non è consentito utilizzare, pena l'annullamento della prova, note, libri di testo, appunti, calcolatrici, cellulari, tablet, supporti cartacei o elettronici in genere. Le risposte del primo esercizio non vanno giustificate. Tutte le altre sì ed in maniera chiara e concisa.

Esercizio 1.

Parte A. Per ciascuna delle seguenti questioni, si indichi la (sola) risposta corretta. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta errata -1 punto ed ogni risposta non data 0 punti.

A1) Sia data nello spazio la sfera S_r di raggio $r > 0$ e centro l'origine. Sia poi

$$I_r = \frac{1}{r^2} \iiint_{S_r} (x^2 + y^2) dx dy dz.$$

Allora

- (a) $\lim_{r \rightarrow 0^+} I_r = 0$;
- (b) $\lim_{r \rightarrow 0^+} I_r = -1$;
- (c) $\lim_{r \rightarrow 0^+} I_r = +\infty$;
- (d) nessuna delle precedenti è vera.

A2) Il piano tangente al grafico della funzione $f(x, y) = \sin(x \log y)$ nel punto $P_0 = (\pi, e)$

- (a) ha equazione $z = x + \frac{\pi}{e}y + 2\pi$.
- (b) non è definito.
- (c) ha equazione $z = x - \frac{\pi}{e}y + 2\pi$.
- (d) ha equazione $z = -x - \frac{\pi}{e}y + 2\pi$.

Parte B. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false. Ogni risposta esatta vale 0,5 punti, ogni risposta errata -0,25 punti ed ogni risposta non data 0 punti.

B1) Il sottoinsieme del piano

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}^2 \setminus ([-1, 2) \times (2, 4))$$

V **F** ha per frontiera un solo punto.

V **F** è aperto.

V **F** è illimitato.

V **F** è connesso.

B2) La curva parametrica:

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = t^2 + 2 \end{cases} \quad \text{con } t \in [0, 1]$$

V **F** è sghemba.

V **F** è semplice.

V **F** è aperta.

V **F** è regolare.

B3) La funzione

$$f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2} - \log(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

ha per dominio

V **F** una sfera, compreso il bordo.

V **F** una superficie sferica.

V **F** l'insieme vuoto.

V **F** un insieme ridotto ad un solo punto.

Esercizio 2. (i) (3pt) Si studi la convergenza puntuale, assoluta ed uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{nx + 1}{n^2 + 1}.$$

(ii) (3pt) Provare che la serie di funzioni

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin\left(\frac{x}{n^2}\right) \cos(n\pi x) e^{-n}}{3n^2 + 4n - 10}$$

converge uniformemente per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3. Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } -\pi \leq x < 0 \\ 2 & \text{per } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

definita in $[-\pi, \pi)$ e prolungata per periodicità su tutto l'asse reale. Sia poi $S(x)$ la funzione somma della serie di Fourier di $f(x)$.

- (i) (3pt) Scrivere lo sviluppo in serie di Fourier di f .
- (ii) (1,5pt) Calcolare $S(-\frac{9}{2}\pi)$, $S(100)$ e $S(100\pi)$.
- (iii) (1,5pt) Si spieghi perché la serie numerica

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n + 1}$$

è convergente e si calcoli la sua somma.

Esercizio 4. (i) (3pt) Dopo aver disegnato il dominio D della funzione di due variabili

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{2x - 4y + x^2 + y^2}}{\log(y - 4x^2)},$$

si dica se D è un sottoinsieme connesso e/o compatto del piano. Si descriva inoltre la sua frontiera.

- (ii) (3pt) Calcolare, se esistono, il valore massimo ed il valore minimo assunti dalla funzione $f(x, y) = e^{xy} + 1$ nel sottoinsieme

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, x \leq 3 - y^2\}.$$

Esercizio 5. Sono dati nel piano i punti

$$A(0, 1) \quad B(2, 3) \quad C(5, 3) \quad D(3, 1).$$

- (i) (2pt) Calcolare l'area della superficie del solido che si ottiene facendo ruotare il quadrilatero $ABCD$ intorno alla retta $y = 1$ di un angolo pari a 360° .
- (ii) (2pt) Calcolare il baricentro della linea spezzata γ costituita dai tre segmenti AB , BC e CD .
- (iii) (2pt) Calcolare il lavoro del campo vettoriale $F(x, y) = (2x - 3)\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j}$ lungo γ percorsa secondo l'ordine $ABCD$.