Sapienza Università di Roma – Facoltà ICI
Laurea in Ingegneria Energetica A.A. 2016/17
Simulazione di esame Analisi Matematica II

1)	2)	3)	4)	5)	Fac.	Tot.

N.B. La parte sovrastante è riservata al docente.

Nome:	Mat.:

AVVERTENZE. Non è consentito utilizzare, pena l'annullamento della prova, note, libri di testo, appunti, calcolatrici, cellulari, tablet, supporti cartacei o elettronici in genere. Le risposte del primo esercizio non vanno giustificate. Tutte le altre sì ed in maniera chiara e concisa.

Esercizio 1.

Parte A. Per ciascuna delle seguenti questioni, si indichi la (sola) risposta corretta. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta errata −1 punto ed ogni risposta non data 0 punti.

A1) Sono date la forma differenziale

$$\omega = \frac{2x}{x^2+y^2+1}\,dx \;+\; \left(\frac{2y}{x^2+y^2+1}+1\right)\,dy$$

ed i punti

$$A(1,1) \qquad B(2,1) \qquad C(1,-100) \qquad D(-2,2).$$

(a) L'integrale di ω lungo la poligonale (aperta) di vertici $ABCD$ vale 0.
(b) L'integrale di ω lungo la poligonale (aperta) di vertici $ABCD$ vale $\log 3+1$.
(c) La forma ω non è chiusa.
(d) L'integrale di ω lungo la poligonale (chiusa) di vertici $ABCDA$ vale $\log 3+1$.

A2) Il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y^2}{(x^2+y^2)\sin x \sin y}$$

(a) vale 1.
(b) non esiste.
(c) vale 0.
(d) vale -1.

Parte B. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false. Ogni risposta esatta vale $0,5$ punti, ogni risposta errata $-0,25$ punti ed ogni risposta non data 0 punti.

B1) Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } \; -\pi \leqslant x < 0 \\ 2 & \text{per } \; 0 \leqslant x < \pi \end{cases}$$

definita in $[-\pi, \pi)$ e prolungata per periodicità su tutto l'asse reale. Sia poi $S(x)$ la funzione somma della serie di Fourier di $f(x)$.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ S è una funzione continua.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ $S(\frac{5}{2}\pi) = 2$.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ $S(3\pi) = 1$.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ $S(3\pi) = \frac{3}{2}$.

B2) Sono dati nello spazio il segmento γ_1 e l'arco γ_2 di equazioni parametriche:

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \end{cases} \quad \text{con } t \in [0, 1] \qquad \text{e} \qquad \gamma_2 : \begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases} \quad \text{con } \theta \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

È dato poi il campo vettoriale $\mathbf{F} = (2x + y)\mathbf{i} + (x - 2y)\mathbf{j}$.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ La curva γ_2 è lunga $\frac{\pi}{2}$.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ La curva γ_1 è semplice.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ La curva γ_2 è chiusa.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ Il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo γ_1 vale -2.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ Il campo $\mathbf{F}$ è conservativo.

B3) L'insieme

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \neq 0, \; y \neq 0, \; -1 < z < 1\}$$

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ è aperto in $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ è connesso in $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ è limitato.

Esercizio 2. (i) (**3pt**) Determinare e classificare i punti critici della funzione

$$f(x,y) = e^{x+y} - x - \frac{y^2}{2}.$$

(ii) (**3pt**) Determinare i massimi e minimi relativi della funzione $f(x,y) = e^x + e^y$ sotto la condizione $x + y = 2$.

Esercizio 3. Si studino la convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale della serie

$$\sum_{n\geqslant 1} e^{n \tan x}$$

definita in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Detta $S(x)$ la sua funzione somma, si calcoli poi $S'(-\frac{\pi}{4})$.

Esercizio 4. Si consideri la regione dello spazio

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1,\ \sqrt{x^2+y^2} - 1 \leqslant z \leqslant 1 - x^2 - y^2\}.$$

(i) (**1pt**) Disegnare il dominio S.

(ii) (**1pt**) Descrivere S in coordinate cilindriche.

(iii) (**2pt**) Calcolare la superficie di S.

(iv) (**2pt**) Calcolare l'integrale di volume $\iiint_S z \, dxdydz$.

Esercizio 5. Dimostrare che la funzione $y = \phi(x)$ definita implicitamente dall'equazione

$$x + y = e^{x-y}$$

e dalla condizione $\phi(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, ha un punto di minimo relativo per $x = \frac{1}{2}$. Determinare poi il polinomio di Taylor di ϕ arrestato al secondo ordine di punto iniziale $x_0 = \frac{1}{2}$.