Università degli Studi Roma Tre
Corso di laurea in Matematica
GE210-Geometria 2 – A.A. 2014-2015
Appello B

Esercizio 1. Sia data la conica piana euclidea $\mathscr{C}: \; x^2 + y^2 - 6xy + 2 = 0$.

(a) Classificare $\mathscr{C}$ e trovare una sua forma canonica $\mathscr{C}'$.

(b) Disegnare $\mathscr{C}$.

(c) Trovare un'isometria del piano euclideo che trasforma $\mathscr{C}$ in $\mathscr{C}'$.

(d) Classificare l'isometria f.

Esercizio 2. Nel piano affine reale sono dati il punto $A(1,1)$, il punto $B(2,2)$ e le rette

$$r: \ x = y - 1 \qquad\qquad s: \ x = 0$$

Determinare, se esistono, tutte le affinità $f : \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ tali che

$$f(A) = B \qquad\qquad f(r) = r \qquad\qquad f(s) = s$$

Tra le affinità trovate, c'è qualche isometria?

Esercizio 3. Sia $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica tale che

$$q(x_1, x_2, x_3) = (2 + k)x_1^2 + 2x_2^2 + kx_3^2 + 4x_1x_2 - 2kx_1x_3,$$

con $k \in \mathbb{R}$.

(a) Diagonalizzare q al variare di k.

(b) Stabilire per quali valori di k la restrizione di q al sottospazio $W = \mathcal{L}((0, 0, 2),\ (1, 1, 0))$ è degenere.

Esercizio 4. (i) Trovare, se esiste, una retta parallela alla retta $r : \begin{cases} y + 2x = 0 \\ 2x - z + 1 = 0. \end{cases}$ e contenuta nel piano $\pi :\ y + x - 2 = 0$.

(ii) Trovare, se esiste, una retta passante per $P(1, 0, 2)$ e parallela ai piani

$$\pi_1 :\ 2x - y + 3 = 0 \text{ e } \pi_2 : \begin{cases} x = t + t' - 1 \\ y = 2 \\ z = 2t - t' + 1. \end{cases}$$

(iii) Trovare nello spazio due rette sghembe r_1 e r_2 tali che $d(r_1, r_2) = 1$ e tali che la perpendicolare comune ad r_1 e r_2 sia la retta $s : \begin{cases} x = 2 \\ z = 0. \end{cases}$

Esercizio 5. Nel piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ sono dati i punti

$$P_1[2,0,0] \qquad P_2[-1,0,1] \qquad P_3[1,-2,-1] \qquad P_4[3,-1,0].$$

(a) Trovare, se esistono, tutte le proiettività di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ che fissano P_1, P_2 e P_3.

(b) Trovare, se esistono, tutte le proiettività di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ che fissano P_1, P_2, P_3 e P_4.

(c) Trovare, se esistono, tutte le proiettività di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ che fissano P_1, P_2, P_3, P_4 e che trasformano $Q_1[1,1,1]$ in $Q_2[1,0,1]$.