Università degli Studi Roma Tre – Corso di laurea in Matematica
GE210-Geometria 2 – A.A. 2016-2017 – APPELLO B

NOME .... MATRICOLA ....

ESERCIZIO 1. Portare in forma canonica e classificare la quadrica

$$\mathcal{Q}: \ x^2 + 2xy + y^2 + 2z^2 - 4x = 0.$$

ESERCIZIO 2. Sia $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ definito da

$$F(x, y, z, t) = (x, y + z, y + z, t), \qquad \forall (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4.$$

(a) Verificare che F è simmetrico rispetto al prodotto scalare standard.

(b) Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ costituita da autovettori di F.

(c) Calcolare la dimensione ed una base di $\mathrm{Im}(F)^\perp$.

ESERCIZIO 3. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ si determinino le equazioni delle circonferenze di raggio 1, aventi centro sul piano $\alpha : x - 2z = 0$ e tangenti alla retta $r : \begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases}$ nel punto $A(1, 0, 0)$.

ESERCIZIO 4. Sono date nel piano affine le rette

$$r: \; y = x \qquad\qquad s: \; x = 0$$

e i punti $A(1,0)$ e $B(2,0)$. Determinare, se esiste, un'affinità f di $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ tale che

$$f(r) = s \qquad\qquad f(A) = B.$$

ESERCIZIO 5. Si consideri la curva algebrica piana affine

$$\mathscr{C}: \ 2x^3 + xy^2 - 4xy + y^2 = 0.$$

(a) Determinare gli asintoti di $\mathscr{C}$.

(b) Calcolare la molteplicità dei punti di $\mathscr{C}$.

(c) Determinare le tangenti principali a $\mathscr{C}$ nei suoi punti singolari.

(d) Calcolare la retta tangente a $\mathscr{C}$ nei suoi punti di ascissa $x = -1$.

ESERCIZIO 6. Sia data la forma quadratica Q su $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tale che

$$Q\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a^2 + 2kbc + c^2 + 2(k-1)ad,$$

con $k \in \mathbb{R}$. Siano poi dati i sottospazi vettoriali

$$U = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a + d = 0,\ c = 0\} \qquad \text{e} \qquad W = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a = 0\}.$$

(a) Determinare i valori di k per i quali Q risulta degenere e $\dim U^{\perp} = 2$.

(b) In corrispondenza dei valori di k trovati al punto precedente, calcolare la segnatura di Q e trovare i vettori isotropi del sottospazio W.