Università degli Studi Roma Tre
Corso di laurea in Matematica
GE210-Geometria 2 – A.A. 2014-2015
Appello C

Esercizio 1. Si consideri la forma quadratica Q su $\mathbb{R}^5$ così definita:

$$Q(\mathbf{x}) = -x_1^2 + x_3^2 - x_4^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3,$$

per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5$. Sia dato poi il sottospazio $V = \mathcal{L}((1,0,-1,0,0),\ (0,1,0,0,1))$.

(a) Determinare rango e segnatura di Q.

(b) Stabilire se Q induce un prodotto scalare su $\mathbb{R}^5$.

(c) Determinare una base di $V^\perp$, il complemento ortogonale di V rispetto a Q.

(d) Determinare rango e segnatura della restrizione di Q al sottospazio $V^\perp$.

(e) Determinare un sottospazio $W \subset \mathbb{R}^5$ di dimensione massima possibile tale che la restrizione di Q su W sia un prodotto scalare su W.

Esercizio 2. Nel piano affine $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ si considerino i punti

$$A_1(0,0) \qquad A_2(2,1) \qquad A_3(-2,-1) \qquad A_4(0,1).$$

Stabilire se esiste un'affinità f di $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ tale che

$$f(A_1) = A_2 \qquad f(A_2) = A_3 \qquad f(A_3) = A_1 \qquad f(A_4) = A_4.$$

Esercizio 3. Si considerino la conica euclidea reale

$$\mathscr{C}:\ 2x^2 - 2xy + 2y^2 + 1 = 0$$

e la conica proiettiva reale

$$\mathscr{C}':\ 2X_0^2 + X_1^2 - X_2^2 + 3X_0X_1 + X_0X_2 = 0.$$

(a) Classificare la conica $\mathscr{C}$ e trovare una sua forma canonica euclidea $\mathscr{C}_0$.

(b) Determinare un'isometria che trasforma $\mathscr{C}$ in $\mathscr{C}_0$ e classificare tale isometria.

(c) Stabilire se esiste un'immersione del piano affine nel piano proiettivo che trasforma la conica $\mathscr{C}$ nella conica $\mathscr{C}'$.

(d) Trovare una forma canonica proiettiva di $\mathscr{C}'$.

Esercizio 4. Sia k un parametro reale. Siano dati nello spazio euclideo il punto P, la retta r ed il piano π_k dove:

$$P = (1, 9, -3) \qquad r : \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - y - 6z = -9 \end{cases} \qquad \pi_k : \ kx + 3y - z = 2k.$$

(a) Calcolare la distanza di P da r.

(b) Per quali valori di k si ha che r e π_k sono paralleli? Calcolare in tal caso la loro distanza.

(c) Per quali k invece sono ortogonali?

(d) Al variare di k, determinare in π_k una retta sghemba con r e passante per il punto $Q(2, 0, 0)$.

Esercizio 5. Siano dati nel piano proiettivo reale i punti

$$P_1[1,0,0] \qquad P_2[1,0,1] \qquad P_3[1,1,1] \qquad P_4[1,1,0] \qquad P_5[1,2,0]$$

(a) Determinare, se esiste, una proiettività f che fissa i punti P_1, P_2, P_3 e tale che $f(P_4) = P_5$.

(b) Trovare, se esiste, un punto improprio di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ che viene trasformato fa f in un punto proprio. (Suggerimento: si lavori deomogenizzando rispetto ad $X_0 \ldots$).

Esercizio 6. Siano u, v e w tre vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^3$. Dimostrare che i vettori $u \wedge v$, $v \wedge w$ e $u \wedge w$, costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$.