Università degli Studi Roma Tre – Corso di laurea in Matematica
GE210-Geometria 2 – A.A. 2016-2017 – APPELLO C

NOME .... MATRICOLA ....

ESERCIZIO 1. Portare in forma canonica e classificare la quadrica:

$$\mathcal{Q}: \; x^2 + 2xy + y^2 + 2z^2 - 4z = 0.$$

ESERCIZIO 2. Sia $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ definito da

$$F(x, y, z, t) = (x - t,\ -y + t,\ -z,\ -x + y), \qquad \forall (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4.$$

(a) Verificare che F è simmetrico rispetto al prodotto scalare standard.

(b) Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ costituita da autovettori di F.

(c) Calcolare la dimensione ed una base di $\mathrm{Im}(F)^\perp$.

ESERCIZIO 3. Sono dati nello spazio la retta r ed il piano π di equazioni:

$$r: \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - z - 3 = 0 \end{cases} \qquad \pi: \ x + y - 2z - 2 = 0.$$

(a) Classificare la posizione reciproca tra r e π e calcolarne la distanza.

(b) Costruire, se esiste, una retta incidente r e perpendicolare a π.

(c) Costruire, se esiste, una sfera tangente a π con il centro su r.

ESERCIZIO 4. Sono date le trasformazioni del piano

$$f : \begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y + 2 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad g : \begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases}$$

(a) Classificare le trasformazioni f, g e $f \circ g$.

(b) Stabilire se $f \circ g = g \circ f$.

(c) Sono dati i punti $A(-1, 2)$, $B(2, 10)$, $C(3, -5)$ e $D(14, -7)$. Calcolare l'area del quadrilatero che si ottiene trasformando il quadrilatero $ABCD$ usando la trasformazione $f^3 \circ g^{-1} \circ f \circ g$.

ESERCIZIO 5. Si consideri la curva algebrica piana affine

$$\mathscr{C}: \; x^3 + xy^2 + 4xy + y^2 = 0.$$

(a) Determinare i punti impropri e gli asintoti di $\mathscr{C}$.

(b) Determinare le tangenti principali a $\mathscr{C}$ nei suoi punti singolari.

(c) Dimostrare che i punti regolari di $\mathscr{C}$ per i quali la retta tangente è parallela alla retta $y = x$, sono ottenuti risolvendo il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} x^3 + xy^2 + 4xy + y^2 = 0 \\ 3x^2 + y^2 + 2xy + 4x + 6y = 0. \end{cases}$$

(d) (**Facoltativo**) Tracciare il grafico di $\mathscr{C}$.

ESERCIZIO 6. Sia $k \in \mathbb{R}$. Sia data la forma quadratica Q su $\mathbb{R}^4$ tale che

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = kx_1^2 + 2kx_2x_3 - x_3^2 - 2x_1x_4.$$

Siano poi dato il sottospazio vettoriale

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 - x_4 = 0,\ x_2 + x_3 = 0\}.$$

(a) Determinare, al variare di k, la dimensione del sottospazio ortogonale di U fatto rispetto a Q.

(b) Determinare i valori di k per i quali Q risulta degenere.

(c) Trovare una base di Sylvester per Q quando $k = 0$.

(d) Posto $k = 1$, trovare, se esiste, un vettore isotropo non nullo per Q.