Sapienza Università di Roma – Facoltà ICI
Laurea in Ingegneria Energetica A.A. 2014/15
Prova di Geometria – 10 Aprile 2015
Prof. Cigliola

1)	2)	3)	4)	5)	FAC.:

N.B. La parte sovrastante è riservata al docente.

Nome	Matricola

Esercizio 1. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false. Ogni risposta esatta vale $0,5$ punti, ogni risposta errata $-0,25$ punti ed ogni risposta non data 0 punti.

I) Sono dati nello spazio i punti

$$A(1,1,0), \qquad B(3,2,-1), \qquad C(1,3,0).$$

V **F** Il triangolo ABC è isoscele.

V **F** I punti A, B, C giacciono su un piano parallelo al piano xz.

V **F** L'area del triangolo ABC vale 2.

II) Si consideri il sistema lineare $S : \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 7 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$

V **F** Il sistema S è impossibile.

V **F** La matrice incompleta del sistema S ha rango 2.

V **F** Il sistema S è equivalente al sistema $S' : \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 7 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 4 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -2 \end{cases}$

V **F** Il sistema S ammette la soluzione $(-2,-1,2)$.

III) È data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\mathbf{V}}$ $\boxed{\mathbf{F}}$ La matrice A è diagonalizzabile.

$\boxed{\mathbf{V}}$ $\boxed{\mathbf{F}}$ L'insieme $\{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AX = A\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$\boxed{\mathbf{V}}$ $\boxed{\mathbf{F}}$ L'insieme $\{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AX = XA\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ di dimensione 1.

$\boxed{\mathbf{V}}$ $\boxed{\mathbf{F}}$ L'insieme $\{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AX = XA\}$ è costituito da matrici simmetriche.

$\boxed{\mathbf{V}}$ $\boxed{\mathbf{F}}$ La matrice $A^2 - I_2$ è invertibile.

IV) Sono dati in $\mathbb{R}^3$ due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ non nulli.

$\boxed{\mathbf{V}}$ $\boxed{\mathbf{F}}$ L'insieme $\{\mathbf{u},\ \mathbf{v},\ -\mathbf{u} \wedge 2\mathbf{v}\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{\mathbf{V}}$ $\boxed{\mathbf{F}}$ Risulta che $\parallel \mathbf{v} \wedge \mathbf{u} \parallel = 0$ se e solo se $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0$.

$\boxed{\mathbf{V}}$ $\boxed{\mathbf{F}}$ Si ha che $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0$ se e solo se $\parallel \mathbf{v} - \mathbf{u} \parallel^2 = \parallel \mathbf{v} \parallel^2 + \parallel \mathbf{u} \parallel^2$.

$\boxed{\mathbf{V}}$ $\boxed{\mathbf{F}}$ Allora vale la relazione $\parallel \mathbf{v} + \mathbf{u} \parallel^2 + \parallel \mathbf{v} - \mathbf{u} \parallel^2 = 2 \parallel \mathbf{v} \parallel^2 + 2 \parallel \mathbf{u} \parallel^2$.

V) Siano dati in $\mathbb{R}^4$ i due sottospazi

$$U = \mathcal{L}((1,1,0,0),\ (1,0,-1,0))$$

$$W = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_3 = x_4 = x_1 - x_2 + x_3 = 0\}.$$

$\boxed{\mathbf{V}}$ $\boxed{\mathbf{F}}$ Il sottospazio $U \cap W$ è isomorfo al sottospazio $U^\perp$.

$\boxed{\mathbf{V}}$ $\boxed{\mathbf{F}}$ Risulta che $\mathbb{R}^4 = (U + W) \oplus W^\perp$.

$\boxed{\mathbf{V}}$ $\boxed{\mathbf{F}}$ Lo spazio U coincide col nucleo dell'applicazione $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ tale che $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_4,\ x_1 - x_2 + x_3)$.

$\boxed{\mathbf{V}}$ $\boxed{\mathbf{F}}$ Lo spazio W è l'immagine dell'applicazione lineare $G : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che $G(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_3,\ x_4,\ x_1 - x_2 + x_3)$.

Esercizio Facoltativo (Programma A.A. 2014/15).
Studiare e disegnare la curva algebrica

$$\mathscr{Q}: \ (x^2 + y^2)^2 - x^2 + y^2 = 0.$$

Esercizio Facoltativo (Programma A.A. precedenti).
Studiare e classificare la conica proiettiva

$$\mathscr{Q}: \ X_0^2 + X_1^2 + X_0X_1 - X_1X_2 + 2X_0X_2 = 0.$$

Esercizio 2. (i) (**2pt**) Enunciare e dimostrare il Teorema di Pitagora in $\mathbb{R}^n$.

(ii) (**2pt**) Trovare una base ortonormale del seguente sottospazio di $\mathbb{R}^5$:

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 - x_2 = x_1 - x_5 = 0\}.$$

(iii) (**2pt**) Sia $k \in \mathbb{R}$. Si consideri il sottospazio di $\mathbb{R}^4$

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid (k+1)x_1 = x_2 - x_3 = kx_3 - kx_2 = 0\}.$$

Al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinare un sottospazio $W \subseteq \mathbb{R}^4$ tale che $V \oplus W = \mathbb{R}^4$.

Esercizio 3. Sono dati nello spazio il punto $P(1,2,0)$, il piano $\pi :\ x - y + 1 = 0$ ed il piano $\sigma :\ y + z - 5 = 0$.

(i) (**1pt**) Stabilire la posizione reciproca tra π e σ.

(ii) (**2pt**) Determinare la retta r passante per P e parallela sia a π che σ.

(iii) (**1pt**) Determinare la distanza tra r e σ.

(iv) (**2pt**) Determinare la distanza tra r e la retta $s \overset{\text{def}}{=} \pi \cap \sigma$.

Esercizio 4. A) Sia $k \in \mathbb{R}$. Si consideri l'endomorfismo F di $\mathbb{R}^4$ associato rispetto alla base canonica alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & k & 1 \\ -1 & 0 & -k & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & k & 0 \end{pmatrix}$$

(i) (**1pt**) Per quali valori di k si ha che F è un isomorfismo?

(ii) (**1pt**) Al variare di k determinare la dimensione dell'immagine di F.

(iii) (**1pt**) Determinare, al variare di k, una base per $\operatorname{Ker} F$ ed $\operatorname{Im} F$.

(iv) (**1pt**) Per quali valori di k si ha $\operatorname{Ker} F \oplus \operatorname{Im} F = \mathbb{R}^4$?

B) (**2pt**) Costruire, se possibile, un endomorfismo diagonalizzabile di $\mathbb{R}^4$ tale che l'autospazio associato all'autovalore $\lambda = 1$ sia

$$E(1) = \mathcal{L}((1,1,0,0),\ (0,1,0,1),\ (1,2,0,1))$$

e il suo nucleo sia il sottospazio

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_4 = x_1 + x_2 = 0\}$$

Esercizio 5. Sia data la conica:

$$\mathscr{C}: \ 2x^2 - 3y^2 + 4x + 12y - 16 = 0.$$

(i) (**2pt**) Classificare $\mathscr{C}$ e trovare una sua forma canonica $\mathscr{C}_0$.

(ii) (**1pt**) Trovare un'isometria f che trasforma $\mathscr{C}$ in $\mathscr{C}_0$ e dire di che tipo di isometria si tratta.

(iii) (**1pt**) Trovare, se esiste, un'isometria che trasforma $\mathscr{C}$ nella conica $\mathscr{D}: \ x^2 + y^2 = 0$.

(iv) (**1pt**) Trovare, se esiste, il centro di $\mathscr{C}$.

(v) (**1pt**) Tracciare il grafico di $\mathscr{C}$.