Sapienza Università di Roma – Facoltà ICI
Laurea in Ingegneria Energetica A.A. 2014/15
Prova2 di Geometria – 20 Febbraio 2015
Prof. Cigliola

1)	2)	3)	4)	5)	FAC.:

N.B. La parte sovrastante è riservata al docente.

Nome	Matricola

Esercizio 1. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false. Ogni risposta esatta vale $0,5$ punti, ogni risposta errata $-0,25$ punti ed ogni risposta non data 0 punti.

I) Sono dati nello spazio i punti

$$A(-1,1,0), \qquad B(-1,1,2), \qquad C(5,-1,2), \qquad D(5,-1,4).$$

V **F** L'area del quadrilatero $ABCD$ vale $8,5$.

V **F** Il quadrilatero $ABCD$ è un parallelogramma.

V **F** I punti A, B, C, D giacciono su un piano verticale.

II) Sono dati in $\mathbb{R}^3$ tre vettori linearmente indipendenti $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ ed un quarto vettore $\mathbf{b}$.

V **F** L'insieme $\{\mathbf{u} + 2\mathbf{v},\ \mathbf{w} - \mathbf{v},\ 3\mathbf{u} + \mathbf{w}\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

V **F** L'insieme $\{\mathbf{u} \wedge \mathbf{v},\ \mathbf{w} \wedge \mathbf{v},\ -\mathbf{u} \wedge \mathbf{w}\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

V **F** L'insieme $\{\mathbf{u},\ \mathbf{v},\ \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

V **F** L'insieme $\{\mathbf{u} \wedge \mathbf{v},\ \mathbf{v},\ \mathbf{u},\ \mathbf{b} + \mathbf{w}\}$ è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^3$.

III) Il sistema lineare $\begin{cases} x+2y=3 \\ x+y-z=1 \\ 2x-y-z=1 \\ 3x-2y+z=3 \end{cases}$

V **F** è impossibile.

V **F** ammette almeno tre soluzioni.

V **F** definisce una retta nello spazio affine.

V **F** ammette la soluzione $(1,-1,2)$.

IV) Siano A e B due matrici simmetriche di ordine 3 e sia 0_3 la matrice nulla 3×3.

V **F** Se esiste, anche A^{-1} è simmetrica.

V **F** La matrice $A+A^T-B-B^T$ è simmetrica.

V **F** La matrice B^5 è simmetrica.

V **F** La matrice $2A-B^T+0_3$ è simmetrica.

V) Siano dati in $\mathbb{R}^4$ i due sottospazi

$$U=\mathcal{L}((1,1,0,0),\ (1,2,-1,0),\ (1,1,0,1))$$

$$W=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 \mid x_4=x_3,\ x_3-x_2+x_1=0\}.$$

V **F** Risulta che $\mathbb{R}^4=U+W$.

V **F** Il sottospazio $U\cap W$ è isomorfo al sottospazio $W^\perp$.

V **F** Si ottiene che $U^\perp\oplus W^\perp=\mathbb{R}^4$.

V **F** Il sottospazio $U^\perp+W$ ha equazioni parametriche date da $\begin{cases} x_1=t-s+2r \\ x_2=t-2r \\ x_3=s-2r \\ x_4=s \end{cases}$

V **F** È possibile costruire un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ che ammette U come autospazio associato all'autovalore $\lambda=0$ e W come autospazio associato all'autovalore $\lambda=1$.

Esercizio 2. Sia $k \in \mathbb{R}$ e si considerino le seguenti matrici di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$A_1 = \begin{pmatrix} k^2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & k \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) (**2pt**) Posto $U = \mathcal{L}(A_1, A_2, A_3, A_4)$, calcolare la dimensione di U al variare di $k \in \mathbb{R}$.

(ii) (**1pt**) Per quali valori di k esiste un sottospazio $W \neq \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ tale che

$$U \oplus W = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})?$$

Determinare esplicitamente una base di W.

(iii) (**2pt**) Date le matrici

$$B = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad C = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix},$$

sia $V = \mathcal{L}(B, C)$, lo spazio da esse generato. Determinare per quali $k \in \mathbb{R}$ si ha

$$\dim (U \cap V) = 2.$$

(iv) (**1pt**) Per quali valori di k è possibile costruire un isomorfismo tra U e lo spazio

$$S = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right) \subset \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})\,?$$

Esercizio 3. Sia $k \in \mathbb{R}$. Si consideri l'endomorfismo F di $\mathbb{R}^4$ tale che

$$F(x, y, z, t) = (x, \quad -x + y - kz + t, \quad -x + t, \quad x + kz)$$

(i) (**1pt**) Determinare la matrice associata ad F rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.

(ii) (**1pt**) Per quali valori di k l'endomorfismo F è suriettivo?

(iii) (**1pt**) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinare la dimensione del nucleo di F.

(iv) (**2pt**) Per quali valori di k l'endomorfismo F è diagonalizzabile?

(v) (**1pt**) Per $k = 1$, trovare una base di $\mathbb{R}^4$ costituita da autovettori per F.

Esercizio 4. Nello spazio euclideo sono dati la retta $r: \begin{cases} x+z-1=0 \\ y-z=0 \end{cases}$ la retta

$$s: \begin{cases} x+y-z-2=0 \\ x-2y-z=0 \end{cases} \quad \text{ed il piano } \pi: \begin{cases} x=t-t' \\ y=-1+2t+t'. \\ z=t' \end{cases}$$

(i) (**1pt**) Trovare, se esiste, un punto $P \in s$ che disti $\frac{2}{\sqrt{14}}$ dal piano π.

(ii) (**1pt**) Trovare, se esiste, un punto $Q \in r$ che disti 2 dal piano π.

(iii) (**1pt**) Stabilire la posizione reciproca tra r ed s.

(iv) (**1pt**) Determinare un piano passante per $P(1,1,0)$ e parallelo ad r ed s.

(v) (**2pt**) Costruire, se esiste, un piano contenente s e ortogonale ad r.

Esercizio 5. Sia data la conica:

$$\mathscr{C}: \ 3x^2+5y^2-2\sqrt{3}\,xy-2=0.$$

(i) (**1pt**) Classificare $\mathscr{C}$ e trovare una sua forma canonica $\mathscr{C}_0$.

(ii) (**2pt**) Trovare un'isometria f che trasforma $\mathscr{C}$ in $\mathscr{C}_0$ e dire di che tipo di isometria si tratta.

(iii) (**1pt**) Spiegare perché non esiste un'isometria che trasforma $\mathscr{C}$ nella conica $\mathscr{E}: \ xy=0$.

(iv) (**1pt**) Trovare i punti singolari della curva $\mathscr{C} \cup \mathscr{E}$.

(v) (**1pt**) Tracciare il grafico di $\mathscr{C}$.

Esercizio Facoltativo. Studiare e disegnare la curva algebrica

$$\mathscr{B}: \ y^2=x^2+x^5.$$