Sapienza Università di Roma – Facoltà ICI
Laurea in Ingegneria Energetica A.A. 2015/16
Prova4 di Geometria – 18 Febbraio 2016
Programma 2015/16 – Prof. Cigliola

1)	2)	3)	4)	5)	Fac.	Tot.

N.B. La parte sovrastante è riservata al docente.

Nome:	Mat.:

"*È bastato un momento per tagliare la testa di Lavoisier,*
e forse non basterà un secolo per generarne un'altra pari alla sua"
(J.L. Lagrange)

AVVERTENZE. Non è consentito utilizzare, pena l'annullamento della prova, note, libri di testo, appunti, cellulari, tablet, supporti cartacei o elettronici in genere. È consentito utilizzare soltanto la tabella delle superficie quadriche fornita dal docente. Le risposte del primo esercizio non vanno giustificate. Tutte le altre sì ed in maniera chiara e concisa.

Esercizio 1.
Parte A. Per ciascuna delle seguenti questioni, si indichi la (sola) risposta corretta. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta errata −1 punto ed ogni risposta non data 0 punti.

A1) Si consideri la matrice A quadrata di ordine 65 il cui elemento generico è

$$a_{ij} = i \cdot j^2$$

Allora la matrice A

(a) è invertibile.
(b) è diagonalizzabile.
(c) ha determinante dispari.
(d) è simmetrica.

A2) Sia data la curva piana $\mathscr{C}: \; x^3 + x^2 + y^5 = 0$.

(a) La curva $\mathscr{C}$ non ammette punti impropri singolari.
(b) La curva $\mathscr{C}$ non ha alcun punto singolare.
(c) La tangente a $\mathscr{C}$ nel punto $P(-1, 0)$ interseca $\mathscr{C}$ con molteplicità di intersezione 3.
(d) La curva $\mathscr{C}$ non ammette asintoti verticali.

Parte B. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false. Ogni risposta esatta vale 0,5 punti, ogni risposta errata −0,25 punti ed ogni risposta non data 0 punti.

B1) Al variare del parametro reale k, sono dati in $\mathbb{R}^4$ il sottospazio W definito dal sistema lineare $\begin{cases} x_1 + kx_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$ e il sottospazio $U = \{(1,0,1,0),\ (k,k,0,0),\ (1,-1,0,k)\}$

V **F** Per $k = 0$ si ha che $U \oplus W = \mathbb{R}^4$.

V **F** Per $k \neq 0$ lo spazio $U^\perp$ ha una base ortogonale costituita da un vettore.

V **F** Per ogni $k \neq 0$ il sottospazio $U^\perp \cap W$ è isomorfo a $\mathbb{R}$.

V **F** Per $k = 0$ risulta che $U + W = \mathbb{R}^4$.

B2) Sono dati nel piano i punti $P(1,1)$, $Q(-1,2)$ e la circonferenza $\mathscr{C}:\ x^2 + y^2 + 2x - y = -\frac{1}{4}$

V **F** La distanza tra P e Q vale 2,3.

V **F** L'area del triangolo che ha per vertici l'origine, P e Q vale $\frac{3}{2}$.

V **F** L'area del cerchio sotteso da $\mathscr{C}$ vale π.

V **F** Il punto P non appartiene a $\mathscr{C}$.

B3) Si consideri il sottospazio W di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori di tipo $(1^m,\ 2^m,\ 3^m)$ al variare di $m \in \mathbb{N}$.

V **F** Lo spazio W ha dimensione infinita.

V **F** Lo spazio W è isomorfo al sottospazio $\{(a+b)x^2 - bx + a - 2b \,|\, a, b \in \mathbb{R}\}$ di $\mathbb{R}_{\leqslant 2}[x]$.

B4) È data la base ortonormale $\{u,\ v,\ w\}$ di $\mathbb{R}^3$. Allora

V **F** $\{u + 2w,\ (v \cdot u)u,\ w \wedge u\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

V **F** $\{u + 2v - w,\ 2u + v + w,\ u + v + w\}$ è una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 2. Si consideri la forma bilineare simmetrica b su $\mathbb{R}^4$ associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} k+1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica. Si consideri poi il sottospazio di $\mathbb{R}^4$

$$W = \mathcal{L}((1,-1,0,0),\ (0,-1,1,0),(0,0,0,2)).$$

(a) (**1pt**) Provare che b non è definita positiva per nessun valore di k.

(b) (**1pt**) Determinare rango e segnatura di b al variare di k.

(c) (**1pt**) Al variare di k si trovi una base diagonalizzante per b.

(d) (**1pt**) Per $k = 0$ determinare un sottospazio massimale di $\mathbb{R}^4$ (rispetto all'inclusione) privo di vettori isotropi.

(e) (**1pt**) Al variare di k, determinare una base del complemento ortogonale rispetto a b di W.

(f) (**1pt**) Per quali valori di k i sottospazi W e $W^\perp$ sono a somma diretta?

Esercizio 3. Sia k un parametro reale. Si consideri l'endomorfismo $F : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definito come

$$F\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+kb & ka-b+kd \\ kc & 0 \end{pmatrix}$$

(a) (**1pt**) Calcolare la dimensione dell'immagine di F al variare di k.

(b) (**1pt**) Trovare l'immagine diretta del sottospazio $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b+2c \\ b+c & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$.

(c) (**1pt**) Per quali valori di k la matrice identica ha controimmagine non vuota?

(d) (**1pt**) Provare che F è diagonalizzabile per ogni valore di k.

(e) (**1pt**) Trovare una base di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ costituita da autovettori per F quando $k = 0$.

(f) (**1pt**) Posto $k = 1$, determinare la matrice associata ad F rispetto alla base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

Esercizio 4. (i) (**2pt**) Portare in forma canonica e classificare la quadrica:

$$\mathcal{Q}:\ 2xy + 2xz - 2x - 1 = 0.$$

(ii) (**2pt**) Determinare, se esiste, un piano contenente le rette

$$r_1 : \begin{cases} x = y + z \\ y = 0 \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x - 3y - z + 2 = 0 \\ y = 1 \end{cases} \qquad r_3 : \begin{cases} y + 2z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

(iii) (**2pt**) Trovare le equazioni delle circonferenze nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ che sono tangenti a r_2 ed r_3 e che hanno il centro su r_1.

Esercizio 5. Sia data la conica euclidea $\mathscr{C} : 2x^2 - y^2 - 4xy - 8x - 4y - 12 = 0$.

(i) **(1pt)** Determinare, se ne ammette, centro, assi di simmetria, asintoti di $\mathscr{C}$.

(ii) **(2pt)** Si determini una isometria che porta $\mathscr{C}$ nella sua forma canonica euclidea.

(iii) **(1pt)** Determinare una affinità che trasforma $\mathscr{C}$ nella sua forma canonica affine.

(iv) **(2pt)** Presa la conica proiettiva $\mathscr{D} :\ X_0^2 - 2X_0X_1 + 2X_0X_2 + 2X_1X_2 = 0$, determinare un cambiamento di coordinate proiettive che manda $\mathscr{D}$ nella sua forma canonica proiettiva. (*Suggerimento: si cerchi una matrice opportuna M tale che con la sostituzione $\boldsymbol{X} = M\boldsymbol{X}'$ si ottiene la forma canonica della curva nelle nuove indeterminate X_0', X_1', X_2'*).

Esercizio 5. (Alternativo, 10pt) Nell'opera latina *Enumeratio linearum tertii ordinis* Newton asserisce che ogni curva piana di terzo grado è *equivalente per proiezione e sezione* ad una delle cinque curve prototipo che oggi chiamiamo parabole divergenti di Newton. Con una terminologia moderna possiamo equivalentemente dire che per ogni curva piana di terzo grado si può trovare un cambiamento di coordinate proiettive che la trasforma in una - e solo una - delle cinque parabole divergenti. Ricordiamo che i cambiamenti di coordinate proiettive lasciano invariato il grado di una curva, trasformano punti regolari in punti regolari e punti singolari in punti singolari dello stesso tipo. Come è usuale, con $\overline{\mathscr{C}}$ indichiamo la chiusura proiettiva rispetto a X_0 di una curva piana affine $\mathscr{C}$.

Consideriamo le curve affini di terzo grado

$$\mathscr{A} :\ y = x^3, \qquad \mathscr{B} :\ x^3 - xy - 1 = 0, \qquad \mathscr{C} :\ y - x^3 + x^2y = 0.$$

(i) Provare che le tre curve $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ e $\mathscr{C}$ hanno un punto improprio singolare.

(ii) Utilizzando il cambio di coordinate proiettive $F : \begin{cases} Y_0 = X_2 \\ Y_1 = X_1 \\ Y_2 = X_0 \end{cases}$, verificare che la curva $\overline{\mathscr{A}}$ appartiene alla classe della parabola cuspidata. (*Suggerimento: può risultare utile tornare al piano affine dopo aver applicato il cambio di variabili proiettive*).

(iii) Utilizzando il modello di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ come disco con il bordo, disegnare il grafico di $\overline{\mathscr{A}}$.

(iv) Utilizzando F, provare che $\overline{\mathscr{B}}$ fa parte della classe delle parabole con un nodo. Trovare esplicitamente le tangenti al nodo di $\overline{\mathscr{B}}$ e dedurre l'andamento di $\mathscr{B}$ presso i bordi del piano.

(v) Provare che $\overline{\mathscr{C}}$ ha due punti impropri, uno regolare e uno isolato. Qual è la sua classe di appartenenza? Trovare gli asintoti di $\mathscr{C}$.

Esercizio Facoltativo. Sia data una forma bilineare non nulla b **antisimmetrica** su $\mathbb{R}^3$. Dimostrare che b è necessariamente degenere. Provare inoltre che esiste una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto a cui la matrice associata a b sia la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.