

Sapienza Università di Roma – Facoltà ICI
Laurea in Ingegneria Energetica A.A. 2016/17
Prova1 di Geometria – 17 Febbraio 2017
Prof. Cigliola

1)	2)	3)	4)	5)	Fac.	Tot.
----	----	----	----	----	------	------

N.B. La parte sovrastante è riservata al docente.

Nome:	Mat.:
-------	-------

*“Scendi giù bella scendi giù
scendi giù bella scendi giù
dammi l’ultimo bacio che non tornerò più.”*
(A. Mannarino)

AVVERTENZE. Non è consentito utilizzare, pena l’annullamento della prova, note, libri di testo, appunti, cellulari, tablet, supporti cartacei o elettronici in genere. È consentito utilizzare soltanto la tabella delle superficie quadriche fornita dal docente. Le risposte del primo esercizio non vanno giustificate. Tutte le altre sì ed in maniera chiara e concisa.

Esercizio 1.

Parte A. Per ciascuna delle seguenti questioni, si indichi la (sola) risposta corretta. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta errata -1 punto ed ogni risposta non data 0 punti.

A1) Le matrici A e B sono quadrate di ordine 19, simmetriche ed hanno determinante strettamente negativo. Quale tra le seguenti è falsa?

- (a) La matrice AB è invertibile.
- (b) La matrice $\sqrt{\frac{3}{7}}A - 14B$ è simmetrica.
- (c) La matrice A^{2017} ha le colonne linearmente indipendenti.
- (d) Il rango della matrice BA^4 è minore o uguale a 18.

A2) La conica

$$\mathcal{C} : x^2 + 2xy - y^2 + 2x + 2y - 1 = 0$$

- (a) è degenere.
- (b) è un’ellisse generale.
- (c) è vuota.
- (d) è un’iperbole non degenere.

Parte B. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false. Ogni risposta esatta vale 0,5 punti, ogni risposta errata -0,25 punti ed ogni risposta non data 0 punti.

B1) La trasformazione $\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = -x + 2 \end{cases}$

- V** **F** non è un'isometria.
 V **F** è un endomorfismo di \mathbb{R}^2 .
 V **F** trasforma il punto $(-1, 1)$ nel punto $(-3, 1)$.
 V **F** manda la retta $r : x + y - 2 = 0$ nella retta $r' : x' + 3y' - 4 = 0$.

B2) Sono dati nel piano euclideo i punti $A(2, 1)$, $B(4, 2)$ e $C(3, -1)$.

- V** **F** Il triangolo ABC è isoscele.
 V **F** Il triangolo ABC ha area di misura $\frac{5}{2}$.
 V **F** Il triangolo ABC è rettangolo.
 V **F** Il vettore $\overrightarrow{AB} = (-2, -1)$.
 V **F** Il triangolo ABC ha perimetro di misura $\sqrt{20}$.
 V **F** Il punto medio del segmento AB è il punto $M(3, 1)$.

B3) Si consideri il sottospazio vettoriale W di $\mathbb{R}[x, y]$ definito come:

$$W = \{ax^2 + bxy + (2b - a)x + by + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

- V** **F** Una base di W è data da $\{2x^2 - 2x, xy + 2x + y, 3\}$.
 V **F** Si ha che $\mathcal{L}(xy + 1, x^2 + y) \subset W$.

Esercizio 2. Sia $k \in \mathbb{R}$. Si consideri l'endomorfismo F di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tale che

$$F \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k+1 & 0 \end{pmatrix} \quad F \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad F \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (i) **(1pt)** Al variare di k , determinare una base dell'immagine di F .
- (ii) **(1pt)** Decidere per quali valori di k l'endomorfismo F è iniettivo.
- (iii) **(2pt)** Calcolare la controimmagine della matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, al variare di k .
- (iv) **(1pt)** Provare che F non è diagonalizzabile per $k = 0$.
- (v) **(1pt)** Posto $k = 1$, determinare l'espressione generale dell'endomorfismo $F \circ F$.

Esercizio 3. Sia $k \in \mathbb{R}$. Sia data la forma quadratica Q su \mathbb{R}^4 tale che

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 2kx_2x_3 + x_3^2 + 2(k-1)x_1x_4.$$

Siano poi dati i sottospazi vettoriali

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_4 = 0, x_3 = 0\} \quad \text{e} \quad W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = 0\}.$$

- (i) **(1,5pt)** Determinare, al variare di k , la dimensione del sottospazio ortogonale di U fatto rispetto a Q .
- (ii) **(1,5pt)** Determinare i valori di k per i quali Q risulta degenere.
- (iii) **(1,5pt)** In corrispondenza dei valori di k trovati al punto precedente, calcolare la segnatura di Q .
- (iv) **(1,5pt)** Trovare i vettori isotropi del sottospazio W quando $k = 1$.

Esercizio 4. Sono date nello spazio le due rette

$$r : \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - z - 3 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ x - y - z - 6 = 0. \end{cases}$$

- (i) **(1pt)** Provare che r ed s sono propriamente parallele e determinare il piano in cui giacciono.
- (ii) **(2pt)** Costruire, se esiste, una circonferenza tangente alle rette r ed s .
- (iii) **(3pt)** Portare in forma canonica e classificare la quadrica

$$Q : x^2 + 2xy + y^2 + 2z^2 - 4x = 0.$$

Esercizio 5. Si consideri la curva algebrica piana affine

$$\mathcal{C} : 2x^3 + xy^2 - 4xy + y^2 = 0.$$

- (i) **(2pt)** Determinare gli asintoti di \mathcal{C} .
- (ii) **(2pt)** Determinare le tangenti principali a \mathcal{C} nei suoi punti singolari.
- (iii) **(2pt)** Calcolare la retta tangente a \mathcal{C} nei suoi punti di ascissa $x = -1$.
- (iv) **(Facoltativo, 5pt)** Tracciare il grafico di \mathcal{C} .