

Sapienza Università di Roma – Facoltà ICI
Laurea in Ingegneria Energetica A.A. 2018/19
ProvaM di Geometria – 8 Febbraio 2019
Prof. Cigliola

Nome:	Mat.:
-------	-------

AVVERTENZE. Non è consentito utilizzare - pena l'annullamento della prova - note, libri di testo, appunti, cellulari, tablet, supporti cartacei o elettronici in genere. Giustificare esaurientemente ogni risposta data.

Esercizio 1. Si considerino nello spazio euclideo i punti

$$A(1, 2, -1), \quad B(2, -1, 0) \quad C(1, 1, 1), \quad D(1, 1, 1)$$

- (a) (1pt) Stabilire se il triangolo ABD è isoscele.
- (b) (1pt) Calcolare l'area del triangolo ABD .
- (c) (1pt) Trovare equazioni cartesiane e parametriche del piano in cui giace il triangolo ADC .
- (d) (2pt) Dire se esiste una sfera che passa per i punti A, B, C e D .

Esercizio 2. Sono dati i due sottospazi di \mathbb{R}^4 :

$$U : \begin{cases} x_1 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases} \quad W : \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

- (a) (2pt) Calcolare basi e dimensioni di U e W .
- (b) (2pt) Calcolare basi e dimensioni di $U + W$ e $U \cap W$.
- (c) (1pt) Stabilire se è vero che $U^\perp \oplus W^\perp = \mathbb{R}^4$.
- (d) (1pt) Calcolare una base ortonormale di W .

Esercizio 3. È dato l'endomorfismo F di \mathbb{R}^4 tale che

$$F(1, 0, 0, 0) = (0, 1, -1, 0) \quad F(0, 1, 0, 0) = (1, 1, 0, 0) \quad F(0, 0, 1, 0) = (-1, -1, 0, 1) \quad F(0, 0, 0, 1) = (0, 1, -1, 1).$$

- (a) (1pt) Stabilire se F è iniettivo, suriettivo, invertibile.
- (b) (2pt) Calcolare basi e dimensioni di nucleo e immagine di F .
- (c) (2pt) Calcolare la controimmagine del vettore $v = (1, -1, 1, 2)$.

Esercizio 4. (4pt) Calcolare una sfera passante per il punto $A(2, 1, -2)$, avente il centro nel piano $\pi : 2x - y - z = 3$ e di raggio $r = 2$.

Esercizio 5. Siano fissati $A(2, 1)$ e $B(-1, -1)$. Si consideri l'insieme \mathcal{C} dei punti P del piano per cui i vettori \overrightarrow{AP} e \overrightarrow{BP} sono ortogonali.

- (i) (2pt) Provare che \mathcal{C} è una circonferenza.
- (ii) (2pt) Calcolare equazione, raggio e centro di \mathcal{C} .
- (iii) (2pt) Determinare i vertici di un quadrato inscritto in \mathcal{C} .

Esercizio 6. (a) (3pt) Enunciare e dimostrare il teorema di Cramer.

- (b) (2pt) Dare la definizione di intersezione di nucleo di un'applicazione lineare e dimostrare che è un sottospazio vettoriale del dominio dell'applicazione.
- (c) (2pt) Dare la definizione di operatore simmetrico ed elencare le proprietà di un operatore simmetrico.