

Sapienza Università di Roma – Facoltà ICI  
Laurea in Ingegneria Energetica A.A. 2018/19  
ProvaM di Geometria – 8 Febbraio 2019  
Prof. Cigliola

|       |       |
|-------|-------|
| Nome: | Mat.: |
|-------|-------|

**AVVERTENZE.** Non è consentito utilizzare - pena l'annullamento della prova - note, libri di testo, appunti, cellulari, tablet, supporti cartacei o elettronici in genere. Giustificare esaurientemente ogni risposta data.

**Esercizio 1.** Si considerino nello spazio euclideo i punti

$$A(1, 2, -1), \quad B(2, -1, 0) \quad C(1, 1, 1), \quad D(1, 1, 1)$$

- (a) (1pt) Stabilire se il triangolo  $ABD$  è isoscele.
- (b) (1pt) Calcolare l'area del triangolo  $ABD$ .
- (c) (1pt) Trovare equazioni cartesiane e parametriche del piano in cui giace il triangolo  $ADC$ .
- (d) (2pt) Dire se esiste una sfera che passa per i punti  $A, B, C$  e  $D$ .

**Esercizio 2.** Sono dati i due sottospazi di  $\mathbb{R}^4$ :

$$U : \begin{cases} x_1 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases} \quad W : \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

- (a) (2pt) Calcolare basi e dimensioni di  $U$  e  $W$ .
- (b) (2pt) Calcolare basi e dimensioni di  $U + W$  e  $U \cap W$ .
- (c) (1pt) Stabilire se è vero che  $U^\perp \oplus W^\perp = \mathbb{R}^4$ .
- (d) (1pt) Calcolare una base ortonormale di  $W$ .

**Esercizio 3.** È dato l'endomorfismo  $F$  di  $\mathbb{R}^4$  tale che

$$F(1, 0, 0, 0) = (0, 1, -1, 0) \quad F(0, 1, 0, 0) = (1, 1, 0, 0) \quad F(0, 0, 1, 0) = (-1, -1, 0, 1) \quad F(0, 0, 0, 1) = (0, 1, -1, 1).$$

- (a) (1pt) Stabilire se  $F$  è iniettivo, suriettivo, invertibile.
- (b) (2pt) Calcolare basi e dimensioni di nucleo e immagine di  $F$
- (c) (2pt) Calcolare la controimmagine del vettore  $v = (1, -1, 1, 2)$ .

**Esercizio 4.** (4pt) Calcolare una sfera passante per il punto  $A(2, 1, -2)$ , avente il centro nel piano  $\pi : 2x - y - z = 3$  e di raggio  $r = 2$ .

**Esercizio 5.** Siano fissati  $A(2, 1)$  e  $B(-1, -1)$ . Si consideri l'insieme  $\mathcal{C}$  dei punti  $P$  del piano per cui i vettori  $\overrightarrow{AP}$  e  $\overrightarrow{BP}$  sono ortogonali.

- (i) (2pt) Provare che  $\mathcal{C}$  è una circonferenza.
- (ii) (2pt) Calcolare equazione, raggio e centro di  $\mathcal{C}$ .
- (iii) (2pt) Determinare i vertici di un quadrato inscritto in  $\mathcal{C}$ .

**Esercizio 6.** (a) (3pt) Enunciare e dimostrare il teorema di Cramer.

- (b) (2pt) Dare la definizione di intersezione di nucleo di un'applicazione lineare e dimostrare che è un sottospazio vettoriale del dominio dell'applicazione.
- (c) (2pt) Dare la definizione di operatore simmetrico ed elencare le proprietà di un operatore simmetrico.