

Sapienza Università di Roma ·· Facoltà ICI
Laurea in Ingegneria Energetica A.A. 2014/15
Prova di Geometria – 21 Gennaio 2015
Prof. Cigliola

1)	2)	3)	4)	5)	FAC.:
----	----	----	----	----	-------

N.B. La parte sovrastante è riservata al docente.

Nome	Matricola
------	-----------

Esercizio 1. Per ciascuna delle seguenti questioni, si indichi la (sola) risposta corretta. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta errata -1 punto ed ogni risposta non data 0 punti.

I) Sia dato il sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^4 così definito:

$$U = \mathcal{L}((0, 1, 1, 0), (1, -1, 1, 0), (\sqrt{2}, 0, 2\sqrt{2}, 0)).$$

Allora

- (a) $\dim U^\perp = 3$.
- (b) $U^\perp = \mathcal{L}((2, 1, -1, 0), (0, 0, 0, -2))$.
- (c) U^\perp è vuoto.
- (d) $U^\perp = \mathcal{L}((-1, -1, 1, 1), (0, 1, -1, 1))$.

II) Data una matrice A quadrata di ordine 3 e di rango 2, allora

- (a) $\text{rk}(A + A^T) = \text{rk } A + \text{rk } A^T$.
- (b) $\text{rk}(A + A^T) \leq 2$.
- (c) $\text{rk}(A^T + A) = 2$.
- (d) nessuna delle affermazioni precedenti è in generale corretta.

III) La conica $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - y - x + 2 = 0$ è

- (a) unione di due rette.
- (b) un punto.
- (c) una parabola.
- (d) l'insieme vuoto.

IV) Sono assegnati quattro numeri. Si sa che, sommando ciascuno di essi alla media aritmetica degli altri tre, si ottengono rispettivamente i numeri 25, 37, 43, 51. Qual è la media aritmetica dei quattro numeri assegnati?

- (a) 29,5
- (b) 17,5
- (c) 23,5
- (d) 19,5

V) Siano dati nel piano i punti

$$A(1,0) \quad B(4,1) \quad C(3,-2).$$

- (a) I punti A, B e C sono allineati.
- (b) Il triangolo di vertici A, B e C ha area 4.
- (c) Il parallelogramma di lati \vec{CA} e \vec{CB} è un rettangolo.
- (d) $\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\| = 4$.

Esercizio Facoltativo. In un riferimento cartesiano, si consideri una circonferenza \mathcal{C} il cui centro è $C(0, \sqrt{2})$. Dimostrare che \mathcal{C} contiene al massimo due punti con entrambe le coordinate razionali.

Esercizio 2. Si considerino i sistemi lineari

$$S : \begin{cases} x_1 - x_3 + hx_4 = 1 \\ x_2 - x_4 = -1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + (h-2)x_4 = h \end{cases} \quad \text{e} \quad SO : \begin{cases} x_1 - x_3 + hx_4 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + (h-2)x_4 = 0 \end{cases}$$

- (i) Discutere e risolvere al variare di $h \in \mathbb{R}$ il sistema S .
- (ii) Spiegare perché l'insieme W_h delle soluzioni del sistema SO non è vuoto ed è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^4 .
- (iii) Al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinare un supplemento di W_h in \mathbb{R}^4 .
- (iv) Al variare di $h \in \mathbb{R}$, stabilire se esiste un isomorfismo $F : W_h \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Esercizio 3. Sia F l'endomorfismo di \mathbb{R}^4 associato alla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica.

- (i) Scrivere esplicitamente le equazioni di F .
- (ii) Determinare $\text{Ker } F$ e $\text{Im } F$ e stabilire se F è un automorfismo di \mathbb{R}^4 .
- (iii) Trovare gli autospazi di F e decidere se F è diagonalizzabile.
- (iv) Stabilire se $\mathbb{R}^4 = \text{Ker } F \oplus \text{Im } F$.

Esercizio 4. (i) Trovare, se esiste, una retta parallela alla retta $r : \begin{cases} y + 2x = 0 \\ 2x - z + 1 = 0. \end{cases}$
e contenuta nel piano $\pi : y + x - 2 = 0$.

(ii) Trovare, se esiste, una retta passante per $P(1, 0, 2)$ e parallela ai piani

$$\pi_1 : 2x - y + 3 = 0 \text{ e } \pi_2 : \begin{cases} x = t + t' - 1 \\ y = 2 \\ z = 2t - t' + 1. \end{cases}$$

(iii) Trovare nello spazio due rette sghembe r_1 e r_2 tali che $d(r_1, r_2) = 1$ e tali che la perpendicolare comune ad r_1 e r_2 sia la retta $s : \begin{cases} x = 2 \\ z = 0. \end{cases}$

(Suggerimento: un grafico può aiutare.)

Esercizio 5. Sia data la curva algebrica piana irriducibile:

$$\mathcal{C} : x^2 + y^2 = y(x^2 - y^2).$$

- (i) Determinare la retta tangente a \mathcal{C} nei suoi punti di ordinata $y = 2$.
- (ii) Determinare il complesso tangente a \mathcal{C} in O .
- (iii) Trovare gli asintoti di \mathcal{C} .
- (iv) Tracciare il grafico di \mathcal{C} .