Sapienza Università di Roma – Facoltà ICI
Laurea in Ingegneria Energetica – A.A. Precedenti
Prova di Geometria – 21 Gennaio 2015
Prof. Cigliola

1)	2)	3)	4)	5)	FAC.:

N.B. La parte sovrastante è riservata al docente.

Nome	Matricola

Esercizio 1. Per ciascuna delle seguenti questioni, si indichi la (sola) risposta corretta. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta errata −1 punto ed ogni risposta non data 0 punti.

I) Sono assegnati quattro numeri. Si sa che, sommando ciascuno di essi alla media aritmetica degli altri tre, si ottengono rispettivamente i numeri 25, 37, 43, 51. Qual è la media aritmetica dei quattro numeri assegnati?

(a) 23,5
(b) 17,5
(c) 19,5
(d) 29,5

II) Data una matrice A quadrata di ordine 3 e di rango 3, allora

(a) $A + A^T$ ha rango 3.
(b) $A^T + A$ ha rango al più 2.
(c) $\operatorname{rk}(A + A^T) = \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} A^T$.
(d) nessuna delle affermazioni precedenti è in generale corretta.

III) Siano dati nel piano i punti

$$A(1,1) \qquad B(2,0) \qquad C(3,3).$$

(a) Il triangolo di vertici A, B e C ha area 1.
(b) $\| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \| = 6$.
(c) I punti A, B e C sono allineati.
(d) Il parallelogramma di lati $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ è un rettangolo.

IV) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, si consideri il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$

$$W_k = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, kx + y + z = x + ky + z = 0\right\}$$

(a) Per $k \neq 1$ la dimensione di W_k vale 3.
(b) Per $k \neq 1$ la dimensione di W_k vale 2.
(c) Per $k = 1$ la dimensione di W_k vale 2.
(d) Per $k = 1$ la dimensione di W_k vale 0.

V) La conica $\mathscr{C}: \; x^2 - 4xy - x + y^2 = 0$ è

(a) un punto.
(b) un'iperbole.
(c) unione di due rette.
(d) un'ellisse.

Esercizio Facoltativo. In un riferimento cartesiano, si consideri una circonferenza $\mathscr{C}$ il cui centro è $C(\sqrt{2}, 1)$. Dimostrare che $\mathscr{C}$ contiene al massimo due punti con entrambe le coordinate razionali.

Esercizio 2. Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, si considerino i sistemi lineari

$$SO : \begin{cases} x_1 - x_2 + \alpha x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + (\alpha - 2)x_4 = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad S : \begin{cases} x_1 - x_2 + \alpha x_4 = 1 \\ x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + (\alpha - 2)x_4 = \alpha \end{cases}$$

(i) Utilizzando l'algoritmo di riduzione di Gauss-Jordan, discutere e risolvere il sistema S.

(ii) Provare che l'insieme U_α delle soluzioni del sistema SO è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$.

(iii) Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, si determini una base *ortogonale* di U_α.

(iv) Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, si determini un sottospazio $W \subseteq \mathbb{R}^4$ tale che $U_\alpha \oplus W = \mathbb{R}^4$.

Esercizio 3. Sia F l'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ associato alla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica.

(i) Scrivere esplicitamente le equazioni di F.

(ii) Determinare $\operatorname{Ker} F$ e $\operatorname{Im} F$ e stabilire se F è un automorfismo di $\mathbb{R}^4$.

(iii) Trovare gli autospazi di F e decidere se F è diagonalizzabile.

(iv) Stabilire se $\mathbb{R}^4 = \operatorname{Ker} F \oplus \operatorname{Im} F$.

Esercizio 4. (i) Determinare il piano passante per il punto $P(1,2,-1)$, parallelo alla retta $r: \begin{cases} x - 2z = 7 \\ y - 5z = -3 \end{cases}$ e perpendicolare al piano $\pi:\ 5x + y + 3z - 11 = 0$.

(ii) Per quali valori del parametro $t \in \mathbb{R}$ le rette $r: \begin{cases} x + tz + 4 = 0 \\ y + 3z + 6 = 0 \end{cases}$ e $s: \begin{cases} x + 4z + 5 = 0 \\ y + 4z + t = 0 \end{cases}$ sono complanari?

(iii) Determinare i punti sull'asse z a distanza 2 dal piano $\sigma:\ -x + \sqrt{2}y + z - 1 = 0$.

Esercizio 5. (i) Sia data nel piano euclideo la conica

$$\mathscr{C}: \ 10x^2 - 20xy - 5y^2 - 12x + 6y - 6 = 0.$$

Si classifichi la conica $\mathscr{C}$, si trovi la sua equazione canonica e la si disegni.

(ii) Determinare l'equazione canonica della conica piana proiettiva

$$\mathscr{D}: \ X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + 2X_0X_1 = 0.$$